Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫЕ L_n ПОЛУСИММЕТРИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 III 1952)

Известно, что наибольший порядок групп движений пространств аффинной полусимметрической связности L_n равен n^2 [1,2]. Будем называть L_n с таким порядком группы движений максимально подвижным. В этой заметке мы решаем задачу определения в X_n всех максимально подвижных L_n и даем необходимые и достаточные условия того, чтобы заданное L_n явилось максимально подвижным.

1. Пусть L_n полусимметрической связности $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma}$ является максимально подвижным с тензором кручения $\Omega^\alpha_{\beta\gamma}$, определенным вектором Ω_α: $\Omega^\alpha_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta\Omega_\gamma - \delta^\alpha_\gamma\Omega_\beta$. Первые соотношения интегрируемости уравнений, которым удовлетворяют компоненты бесконечно малого движения V^σ и $V^\tau_{,\sigma}$, где ковариантное дифференцирование ведется относительно $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$, представляются с помощью лиевого дифференцирования [3] вдоль V^σ в виде

$$D_L R^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0, \tag{1}$$

$$D_L \Omega^\alpha_{\beta\gamma} = 0, \tag{2}$$

где $R^\alpha_{\beta\gamma\delta}$ — составляющие тензора кривизны связности $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$. Группа движений L_n является подгруппой полной группы движений A_n со связностью $\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)}$ или совпадает с ней, откуда получаем [4]:

$$A_n \text{ эквипроективное } [5]; \tag{a}$$

$$R_{\beta\gamma} = (1-n)\,\varepsilon\lambda_\beta\lambda_\gamma; \tag{3}$$

$$\lambda_{\beta,\gamma} = c\lambda_\beta\lambda_\gamma, \tag{4}$$

где $R^\alpha_{\beta\gamma}$ — составляющие тензора Риччи A_n; λ_β — некоторый вектор, может быть, равный нулю; c — определенная постоянная; $\varepsilon = \pm 1$.

Соотношения (2) эквивалентны равенствам

$$D_L \Omega_\alpha = 0. \tag{5}$$

Если учесть коммутативность операций лиевого и ковариантного дифференцирований, то из выражений (5) следует

$$D_L \Omega_{\alpha,\beta} = 0, \tag{6}$$

откуда получаем градиентность вектора Ω_α: $\Omega_\alpha = \partial_\alpha \Omega$, и ранг тензора $\Omega_{\alpha.\beta}$ равен 1. Соотношения (1) и (5) позволяют написать

$$D_L (R_{\alpha\beta} + \Omega_\alpha \Omega_\beta) = 0,$$

причем под знаком лиевого дифференцирования будет снова тензор ранга 1. Следовательно, тензоры λ_α, Ω_α пропорциональны, и уравнения (3) представляются в виде

$$R_{\alpha\beta} = (1 - n)\, c_1 \Omega_\alpha \Omega_\beta, \tag{b}$$

в которых инвариант c_1, являющийся функцией лишь Ω, в силу (3) обращается в постоянную.

Применяя эти рассуждения к соотношениям

$$D_L \{\Omega_{\alpha,\beta} + \Omega_\alpha \Omega_\beta\} = 0,$$

вытекающим из равенств (5), (6), получим

$$\Omega_{\alpha,\beta} = c_2 \Omega_\alpha \Omega_\beta, \tag{c}$$

где c_2 — некоторый инвариант. Условия интегрируемости (c) показывают, что инвариант c_2 будет лишь функцией Ω, обращающейся в постоянную в силу (5) и (6).

Предполагая L_n полусимметрической связности с тензором кручения, определенным вектором Ω_α, максимально подвижным, мы установили, следовательно, для них наличие условий (a), (b), (c). Из них, в частности, вытекает, что семейства ∞^1 гиперповерхностей $\Omega(x^1, x^2, \ldots$ $\ldots, x^n) = a$ суть геодезические и параллельные X_{n-1} в A_n.

2. Пусть, обратно, L_n полусимметрической связности удовлетворяет условиям (a), (b), (c). Тогда условия интегрируемости уравнений, определяющих компоненты бесконечно малого движения V^σ и $V^\sigma_{,\tau}$, равносильны соотношениям (5).

Выводные условия интегрируемости являются следствиями этих соотношений, и мы получаем теорему:

Т е о р е м а 1. *L_n полусимметрической связности с тензором кручения, определенным вектором Ω_α, тогда и лишь тогда является максимально подвижным, если выполнены условия* (a), (b), (c), *в которых c_1, c_2 — некоторые постоянные.*

3. Покажем теперь существование L_n полусимметрической связности, удовлетворяющей условиям (a), (b), (c). Введем в A_n проективно-декартову систему координат, в которой коэффициенты связности будут вида

$$\Lambda^\alpha_{(\beta\gamma)} = -\delta^\alpha_\beta \partial_\gamma \psi - \delta^\alpha_\gamma \partial_\beta \psi.$$

В этой системе координат условия (b) и (c) записываются в форме

$$\partial_{\alpha\beta}\psi = -\partial_\alpha \psi\, \partial_\beta \psi + c_1 \partial_\alpha \Omega\, \partial_\beta \Omega, \tag{b$'$}$$

$$\partial_{\alpha\beta}\Omega = -\partial_\alpha \Omega\, \partial_\beta \psi - \partial_\beta \Omega\, \partial_\alpha \psi + c_2 \partial_\alpha \Omega\, \partial_\beta \Omega. \tag{c$'$}$$

Наша задача приводится к выяснению решений ψ, Ω, удовлетворяющих системе (b$'$), (c$'$). Эта система вполне интегрируема при произвольных постоянных c_1, c_2, и, учитывая регулярность правых ее частей относительно входящих в них переменных, мы приходим к выводу:

Т е о р е м а 2. *Существует единственное L_n полусимметрической связности, удовлетворяющее условиям* (a), (b), (c) *при определенных значениях постоянных c_1, c_2, для которого функции ψ, Ω и их про-*

изводные первого порядка принимают в произвольно заданной точке наперед заданные начальные значения, причем начальные значения всех первых производных функции Ω не обращаются одновременно в нуль.

4. В случае $c_1 = 0$ сопутствующая связность $\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$ аффинно-евклидова; случай $c_2 = 0$ характеризует симметрическое в смысле П. К. Рашевского пространство L_n (6).

Из условий, характеризующих максимально подвижные L_n, вытекают следующие два предложения:

Теорема 3. *Максимально подвижное L_n полусимметрической связности тогда и только тогда является симметрическим пространством, если*

$$\Omega_{\alpha,\beta} = 0.$$

Теорема 4. *Группа движений максимально подвижного L_n совпадает с полной группой движений сопутствующего A_n симметрической связности тогда и только тогда, если A_n ненулевой кривизны.*

Из найденных условий заключаем также, что максимально подвижное L_n будет нулевой кривизны тогда и лишь тогда, когда $c_1 + c_2 + 1 = 0$.

В случае, когда L_n являются пространствами с групповой связностью, получаем:

Теорема 5. *Групповые L_n полусимметрической связности являются максимально подвижными.*

Теорема 6. *Групповое L_n с кручением тогда и только тогда обладает максимальной подвижностью, т. е. n^2-параметрической группой движений, если любая пара операторов исходной группы образует двухчленную подгруппу.*

Пензенский педагогический институт
им. В. Г. Белинского

Поступило
19 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. П. Егоров, ДАН, **64**, № 5 (1949). [2] И. П. Егоров, ДАН, **73**, № 2 (1950). [3] Б. Л. Лаптев, Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, **10**, сер. 3 (1938). [4] И. П. Егоров, ДАН, **84**, № 2 (1952). [5] А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950, стр. 173. [6] П. К. Рашевский, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 8, 82 (1950).