Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. И. ГАВРИЛОВ

# ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЛЯПУНОВУ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 27 III 1952)*

Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n} P_{ik}(t)\, x_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $P_{ik}(t)$ — непрерывные (вообще говоря, комплексные) функции действительного переменного $t$ при $t \geqslant t_0$. В нашей работе устанавливается эффективный достаточный критерий для устойчивости по Ляпунову [1] решения $(x_i = 0)$ системы (1) при $t \geqslant t_0$. Этот критерий обнаруживает устойчивость как при положительных характеристических числах, так и при наличии характеристических чисел, равных нулю. Из этого критерия не только следуют, но и соответствующим образом усиливаются некоторые результаты Винтнера [2], Вейля [3], В. А. Якубовича [4], Шпета [5], В. В. Хорошилова [6, 7], И. М. Рапопорта [8], К. П. Персидского [9], Чезари [10], Б. Н. Демидовича [11], В. П. Басова [12]. Более того, существует достаточно широкий класс систем (1), устойчивость которых обнаруживается нашим критерием, тогда как ни один из упомянутых критериев к таким системам не применим.

## Предварительные понятия

А. Пусть $\| x_{ij}(t) \|$ — фундаментальная система решений для (1) такая, что $\{x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\}$ — решение при любом $j = 1, 2, \ldots, n$, $\|x_{ij}(T)\| = E$. Для устойчивости по Ляпунову решения $(x_i = 0)$ системы (1) необходимо и достаточно, чтобы все $|x_{ij}(t)|$ были ограничены при $t \geqslant t_0$.

Б. Легко проверить, что каждое решение $\{x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}\}$ из $\| x_{ij}(t) \|$ удовлетворяет системе интегральных уравнений Вольтерра

$$x_{ij} = v_i \left[ \int_T^t \frac{P_{i1} x_{1j} + \ldots + P_{i,\,i-1} x_{i-1,\,j} + P_{i,\,i+1} x_{i+1,\,j} + \ldots + P_{in} x_{nj}}{v_i(\tau)}\, d\tau + \delta_i^j \right], \tag{2}$$

где $v_i = e^{\int_T^t P_{ii}(\tau) d\tau}$, $\delta_i^j$ — символ Кронекера, и однозначно определяется этой системой.

В. Пусть $D_n$ — определитель порядка $n$ с элементами, удовлетворяющими специальным условиям: $a_{ii} = 1$, $a_{ij} \leqslant 0$ $(i \neq j)$.

Определение. $D_n$ обладает $A^{(+)}$-свойством, если алгебраическое дополнение $A_{ik}$ любого его элемента $(i, k)$ неотрицательно.

В дальнейшем понятие $A^{(+)}$-свойства таких определителей $D_n$ существенно используется при выводе критерия устойчивости. Алгебраический смысл $A^{(+)}$-свойства раскрывает следующая основная лемма.

Лемма. *Пусть $D_n$ — определитель порядка $n$ с элементами $a_{ii}=1$, $a_{ij}\leqslant 0$ $(i\neq j)$. Для того чтобы $D_n$ обладал $A^{(+)}$-свойством, достаточно, чтобы всевозможные диагональные миноры из $D_n$ от 2-го до $n-1$-го порядка включительно были неотрицательными.*

Г. Далее обозначается: $u_s = e^{\int_T^t \operatorname{Re} P_{ss}(\tau)d\tau}$, $I_{ik} = u_i(t)\int_T^t \frac{|P_{ik}(\tau)|}{u_i(\tau)}d\tau$ $(i\neq k)$.

Системе (1) ставится в соответствие детерминант $|b_{ik}|$ порядка $n$, у которого $b_{ii}=1$, $b_{ik}=-I_{ik}$. Каждое $I_{ik}$ в строчке $i$ взято при одном и том же значении $t$, именно $t_i$. Этот детерминант называется основным и обозначается $D_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.

## Детерминантный критерий устойчивости

*Для устойчивости по Ляпунову решения $(x_i=0)$ системы* (1) *при $t\geqslant t_0$ достаточно, чтобы существовало такое $T\geqslant t_0$, что при любой комбинации аргументов $t_s\geqslant T$:*

1) *основной определитель $D_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ строго положителен, а все его диагональные миноры неотрицательны;*

2) *все функции $u_s\frac{A_{sk}}{D_n}$ $(s, k=1, 2, \ldots, n)$ ограничены.*

*Здесь $A_{sk}$ — алгебраическое дополнение элемента $(s, k)$ определителя $D_n(t_1, t_2, \ldots, t_n)$.*

Доказательство опирается на понятия, введенные в пп. А, Б, В, Г. Если $\tau_{ij}$ — наибольшие из значений на $[T, t]$, где достигается $\max|(x_{ij}(t)|$, а $\varphi_{ij}$ — этот максимум, то получим оценки

$$\varphi_{ij}\leqslant u_j\frac{A_{ji}}{D_n}\quad (i, j=1, 2, \ldots, n), \tag{3}$$

где правые части рассматриваются при $t_i=\tau_{ij}$.

## Анализ детерминантного критерия устойчивости

Рассмотрим в качестве примеров, иллюстрирующих критерий, некоторые системы частного вида.

I. Если в (1) $P_{ik}=\text{const}$, то приведем систему к каноническому виду. Для такой системы детерминантный критерий необходим и достаточен.

II. Пусть в (1) $P_{ik}=a_{ik}+\omega_{ik}(t)$, где $a_{ik}=\text{const}$, $\omega_{ik}(t)$ непрерывны при $t\geqslant t_0$. Если $i\geqslant k$, то $\omega_{ik}(t)$ либо абсолютно интегрируема на $[t_0, \infty]$, либо $\omega_{ik}(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Если же $i<k$, то $\omega_{ik}(t)$ непрерывные и ограниченные функции при $t\geqslant t_0$. Такие системы назовем классическими. Считаем $\|a_{ik}\|$ канонической матрицей.

Теорема. *Пусть классическая система обладает свойствами:*

1) *если $\lambda_s$ — кратный корень характеристического уравнения $|a_{ik}-\lambda\delta_i^k|=0$ и степень элементарного делителя $e_s>1$, то строго $\operatorname{Re}\lambda_s<0$;*

2) *если $\lambda_s$ — простой корень или кратный, но $e_s=1$, то $\operatorname{Re}\lambda_s\leqslant 0$. При $\operatorname{Re}\lambda_s=0$ дополнительно требуется, чтобы $\int_{t_0}^{\infty}|\omega_{sk}(\tau)|\,d\tau<\infty$ при $k\neq s$ из строчки, где находится данное $\lambda_s$, и существует $N>0$ так, что $\int_{t_0}^{t}\omega_{ss}(\tau)\,d\tau<N$ при $t\geqslant t_0$.*

*Тогда классическая система устойчива при $t\geqslant t_0$.*

Эта теорема непосредственно следует из детерминантного критерия. Оценки (3) допускают в этом случае уточнение. Именно, получим

$$\varphi_{ij} \leqslant u_j\,[\delta_i^j + \sigma_{ij}(t)], \tag{4}$$

где $\delta_i^j$ — символ Кронекера, $\sigma_{ij}(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание. Классические системы являются хотя и важным, но весьма узким классом систем (1).

По устойчивости классических систем имеется обширная литература (например, ([10–12], [3], [4])). Основные результаты этих авторов следуют из детерминантного критерия. Более того, хотя приведенная теорема является лишь одним из следствий детерминантного критерия в применении к классическим системам, но даже эта теорема — более общая, чем результаты упомянутых авторов. Действительно, в указанных работах предполагается наличие лишь одного нулевого корня характеристического уравнения. Здесь это ограничение снято. Кроме того, здесь при $i<k$ функции $\omega_{ik}(t)$ всего лишь ограниченные непрерывные функции, за исключением строчек, где находятся $\lambda_s$ с $\operatorname{Re}\lambda_s = 0$. Во всех отмеченных работах на $\omega_{ik}(t)$ наложены более сильные требования.

III. В. В. Хорошилов в работах ([6], [7]) рассматривает классические системы частного вида и устанавливает асимптотические формулы для решений. Оценки (4) совпадают с этими формулами. Более того, асимптотические формулы в ([7]) получены лишь для системы второго порядка. Оценки (4) справедливы для систем любого порядка.

IV. Пусть $y'' + Q(x)y = 0$, где $Q(x) = O\left(\frac{1}{x^{2+\delta}}\right)$, $\delta > 0$. Шпет ([5]) для общего решения дает асимптотическую формулу $y = x\,[c + \sigma(x)]$, где $\sigma(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Детерминантная оценка (3) для общего решения совпадает с асимптотической формулой.

V. И. М. Рапопорт ([8]) рассматривает системы

$$\frac{dy_j}{dt} = w_j(t)\,y_j + \sum_{i=1}^{n} c_{ij}(t)\,y_i, \quad \text{где } c_{ij} \subset L\,(t_0,\ \infty).$$

В работе ([8]) даются асимптотические формулы для решений и условия для устойчивости. Результат Рапопорта об устойчивости следует из детерминантного критерия, а асимптотические формулы для решений совпадают с оценками (3). Отсюда следует, в частности, результат Винтнера ([2]).

Замечание. Совпадение оценок (3) с точными формулами, отмеченными в пп. III, IV, V, указывает на то, что детерминантные оценки (3) нельзя улучшить.

VI. К. П. Персидский ([9]) устанавливает критерий устойчивости для системы (1), где $P_{ik}(t)$ — функции со слабой вариацией. Результат Персидского следует из детерминантного критерия.

VII. Теорема. *Пусть в системе* (1):

1) *коэффициенты* $P_{ij}(t)$, *находящиеся в каких-то* $s$ *строчках* ($s \leqslant n$), *абсолютно-интегрируемы на* $[t_0,\ \infty]$;

2) *остальные коэффициенты обладают свойствами*:

а) *существуют* $\delta > 0$ *и* $T \geqslant t_0$ *так, что* $P_{kk}(t) < -\delta$ *при* $t \geqslant T$;

б) $P_{\alpha\beta}$ *при* $\alpha < \beta$ — *произвольные непрерывные и ограниченные функции* $t$ *для* $t \geqslant t_0$;

в) $P_{\alpha\beta}$ *при* $\alpha > \beta$ *либо стремятся к нулю при* $t \to \infty$, *либо абсолютно интегрируемы на* $[t_0,\ \infty]$.

*Тогда система* (1) *устойчива при* $t \geqslant t_0$ *и имеет* $s$ *характеристических чисел, равных нулю.*

Эта теорема следует из детерминантного критерия. Легко проверить, что к данной системе не применим ни один из перечисленных выше критериев.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
11 III 1952

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1950. [2] A. Wintner, Am. Journ. Math., **67**, 417 (1945). [3] H. Weyl, ibid., **68**, 7 (1946). [4] В. А. Якубович, Матем. сборн., **28** (70): 1, 217 (1951). [5] В. В. Степанов, Дифференциальные уравнения, 1950, стр. 256—259. [6] В. В. Хорошилов, Прикладн. матем. и мех., **15**, в. 1 (1951). [7] В. В. Хорошилов, Уч. зап. ЛГУ, в. 19 (1950). [8] И. М. Рапопорт, ДАН, **78**, № 6 (1951). [9] К. П. Персидский, Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, **11** (1938). [10] L. Cesari, Annali della Scula Normale di Pisa, ser. **2**, 9, 163 (1940). [11] Б. Н. Демидович, ДАН, **72**, № 6 (1950). [12] В. П. Басов, ДАН, **81**, № 1 (1951).