Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 3

МАТЕМАТИКА

В. С. ВИДЕНСКИЙ

СЛЕДСТВИЕ ОДНОГО ПРЕДЛОЖЕНИЯ С. Н. БЕРНШТЕЙНА О ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЯХ РОДА НУЛЬ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 25 III 1952)

В заметке ([1]) С. Н. Бернштейн доказал следующую лемму:

Целая четная функция

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} \quad (a_0 > 0,\ a_{2n} \geqslant 0) \tag{1}$$

будет нулевого рода тогда и только тогда, когда интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\log F(x)}{x^2}\, dx < \infty \tag{2}$$

сходится.

Следуя С. Н. Бернштейну, назовем четную непрерывную вместе со своей первой производной на всей оси $(-\infty, +\infty)$ функцию $\Phi(x) = e^{p(x)}$ нормально возрастающей ($\Phi(x) \in N$), если $p(x) > 0$ и

$$x\frac{\Phi'(x)}{\Phi(x)} = xp'(x) \to \infty \tag{3}$$

монотонно возрастает к бесконечности при $|x| \to \infty$. К рассмотрению этих функций естественным образом приводят некоторые вопросы о весовых и квази-аналитических функциях. Формулированная выше теорема С. Н. Бернштейна позволяет легко доказать следующее предложение.

1. Теорема 1. *Если* $e^{p(x)} \in N$ *и сходится интеграл*

$$\int_1^{\infty} \frac{p(x)}{x^2}\, dx < \infty, \tag{4}$$

то существует такая целая четная функция $F(x)$ *нулевого рода вида* (1), *что*

$$e^{p(x)} < F(x) \quad \text{при } -\infty < x < \infty. \tag{5}$$

В самом деле, С. Мандельбройт ([2]) показал, что при условии (4) существует такая последовательность положительных чисел $\{m_n\}$ $\left(\sqrt[n]{m_n} \to \infty\right)$, что функция

$$T(x) = \max_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{m_n} \quad (x \geqslant 1) \tag{6}$$

подчинена неравенствам

$$p(x) < \log T(x) < p(x) + \log x \tag{7}$$

и, следовательно, благодаря (4), сходится интеграл

$$\int_1^\infty \frac{\log T(x)}{x^2}\,dx<\infty. \tag{8}$$

Рассмотрим целую функцию $\left(\sqrt[n]{m_n}\to\infty\right)$

$$F_0(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{m_n^2}. \tag{9}$$

Легко видеть, что функция $F_0(x)$ нулевого рода. Действительно, очевидно, что интегралы

$$\int_1^\infty \frac{\log F_0(x)}{x^2}\,dx \quad \text{и} \quad \int_1^\infty \frac{\log F_1(x)}{x^2}\,dx, \tag{10}$$

где

$$F_1(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n\,(n+1)\,m_n^2}, \tag{11}$$

сходятся и расходятся одновременно. Но из определения функции $T(x)$ следует, что

$$F_1(x)<1+T^2(x)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\,(n+1)}=1+T^2(x),$$

откуда, благодаря (8), вытекает сходимость второго из интегралов (10). С другой стороны, замечая, благодаря (6) и (9), что $T(x)\leqslant F_0(x)$, приходим вследствие неравенства (7) к утверждению теоремы 1.

2. Следствие 1. *Если* $e^{p(x)}\in N$ *и интеграл* (4) *сходится, то* $e^{p(x)}$ *является майорантой конечного роста* [3].

Действительно, если

$$|f(x)|<e^{p(x)} \quad (-\infty<x<\infty),$$

то, вследствие (5), имеем, тем более,

$$|f(x)|<F(x) \quad (-\infty<x<\infty),$$

где $F(x)$ — целая функция нулевого рода вида (1).

3. В заметке [4] С. Н. Бернштейн доказал, применяя основную теорему Т. Карлемана о квази-аналитических функциях, что *функция* $\Phi(x)\in N$ *не может быть весовой, если сходится интеграл*

$$\int_1^\infty \frac{\log \Phi(x)}{x^2}\,dx<\infty.$$

Этот результат непосредственно вытекает из теоремы 1 (доказательство которой не зависит от теоремы Карлемана), так как *целая функция* $F(x)$ *вида* (1) *является весовой тогда и только тогда, когда род ее выше нуля* [5].

4. Теорема 2. *Чтобы целая четная функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_{2n}z^{2n}$$

была нулевого рода, необходимо и достаточно, чтобы функция

$$\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}| z^{2n}$$

была нулевого рода

Необходимость. Пусть

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{z_n^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$$

будет нулевого рода; тогда четная функция с неотрицательными коэффициентами

$$F(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z^2}{|z_n|^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} z^{2n}$$

также будет нулевого рода и, тем более, $\psi(z)$ будет нулевого рода, так как $|c_{2n}| \leqslant a_{2n}$ и, следовательно, сходится интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\log \psi(x)}{x^2} dx < \int_1^{\infty} \frac{\log F(x)}{x^2} dx < \infty.$$

Достаточность. Пусть $\psi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}| z^{2n}$ нулевого рода. В заметке [6] С. Н. Бернштейн показал, что *сумма двух четных функций нулевого рода также является функцией нулевого рода.*

Пусть сперва все коэффициенты $f(z)$ вещественны; тогда $f(z)$ представится в виде разности двух четных функций с неотрицательными коэффициентами

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}| z^{2n} - \sum_{n=0}^{\infty} (|c_{2n}| - c_{2n}) z^{2n} = \psi(z) - \psi_1(z),$$

причем $\psi_1(z)$ будет нулевого рода, так как $|c_{2n}| - c_{2n} \leqslant 2|c_{2n}|$.

Если c_{2n} комплексны, то, полагая $c_{2n} = \alpha_{2n} + i\beta_{2n}$, представим $f(z)$ в виде суммы

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{2n} z^{2n} + i \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{2n} z^{2n} = \varphi(z) + i\varphi_1(z),$$

где $\varphi(z)$ и $\varphi_1(z)$ будут функциями нулевого рода, так как, благодаря неравенствам $|\alpha_{2n}| \leqslant |c_{2n}|$ и $|\beta_{2n}| \leqslant |c_{2n}|$, сходятся интегралы

$$\int_1^{\infty} \frac{\log\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |\alpha_{2n}| x^{2n}\right\}}{x^2} dx \quad \text{и} \quad \int_1^{\infty} \frac{\log\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |\beta_{2n}| x^{2n}\right\}}{x^2} dx.$$

Следствие 2. *Чтобы целая четная функция*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$$

была нулевого рода, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{\log\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |c_{2n}| x^{2n}\right\}}{x^2} dx.$$

5. В 1926 г. С. Н. Бернштейн доказал ([7, 8]), что *если целая четная функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$$

нулевого рода, то сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|}.$$

Но, как известно ([9]), если $F(x)$ вида (1), то интеграл (2) сходится и расходится одновременно с рядами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}^{*} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{\bar{a}_{2n}},$$

где $a_{2n}^{*}=\max\limits_{k\geqslant 0} \sqrt[2(n+k)]{\bar{a}_{2(n+k)}}$, а $\bar{a}_{2n}$ — числа исправленной последовательности, соответствующей многоугольнику Валирона * (см. ([2])). Таким образом, благодаря следствию 2 справедливо

Следствие 3. *Чтобы целая четная функция*

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} z^{2n}$$

была нулевого рода, необходимо и достаточно, чтобы сходились ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{2n}^{*} \quad \textit{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[2n]{\bar{c}_{2n}},$$

где $c_{2n}^{*}=\max\limits_{k\geqslant 0} \sqrt[2(n+k)]{|\bar{c}_{2(n+k)}|}$, *а* $\bar{c}_{2n}$ — *числа исправленной последовательности Валирона.*

Искренне благодарю акад. С. Н. Бернштейна за внимание к моей работе.

Поступило
11 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, 549 (1951). [2] С. Мандельбройт, Квазианалитические классы функций, Л.-М., 1937. [3] С. Н. Бернштейн, ДАН, 65, 117 (1949). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 77, 773 (1951). [5] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, Л.—М., 1937. [6] С. Н. Бернштейн, ДАН, 66, 545 (1949). [7] С. Н. Бернштейн, Наукові зап. н.-д. матем. катедр України, в. 2 (1926). [8] С. Н. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales ..., Paris, 1926. [9] S. Mandelbrojt, Série de Fourier et classe quasi-analytique de fonctions, Paris, 1935.

---

* Между прочим, числа $\bar{a}_{2n}$ могут быть определены следующим образом: положим $\tau(r)=\max\limits_{n\geqslant 1} a_{2n} r^{2n}$, тогда

$$\bar{a}_{2n}=\min_{r\geqslant 1}\frac{\tau(r)}{r^{2n}}.$$

Действительно, обозначим числа исправленной последовательности Валирона через γ_{2n}, тогда $\tau(r)=\max\limits_{n\geqslant 1}\gamma_{2n} r^{2n}$, откуда $\gamma_{2n}\leqslant\frac{\tau(r)}{r^{2n}}$. С другой стороны (см. ([2]), стр. 72), каждому фиксированному n соответствует такое r_n, что

$$\gamma_{2n}=\frac{\tau(r_n)}{r_n^{2n}}=\min_{r\geqslant 1}\frac{\tau(r)}{r^{2n}}.$$