Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

ГИДРАВЛИКА

А. Л. КЛЯЧКИН

ПРЕДЕЛЬНЫЕ СОСТОЯНИЯ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА С МЕХАНИЧЕСКИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБЕ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 19 III 1952)

1. Исходные допущения и уравнения. Рассмотрим одномерное стационарное течение вязкого газа с механическими источниками в цилиндрической трубе в предположении, что: 1) коэффициент сопротивления λ не зависит от чисел Re и M; 2) тепло трения передается всей массе движущегося газа и, следовательно, пограничный слой замыкается на оси канала; 3) теплоемкость газа не зависит от температуры и, следовательно, $k = c_p / c_v = \text{const}$.

В качестве исходных используем дифференциальные уравнения движения газа:
для скорости и удельного объема

$$(M^2-1)\frac{dw}{w} = (M^2-1)\frac{dv}{v} = -\frac{g}{a^2}(dL_T + k\,dL_r); \tag{1}$$

для температуры

$$(M^2-1)\frac{dT}{T} = \frac{g(k-1)}{a^2}(dL_T + k\,M^2\,dL_r); \tag{2}$$

для числа M

$$(M^2-1)\frac{d\,M^2}{M^2} = -\frac{g}{a^2}\left[(k+1)\,dL_T + 2k\left(1+\frac{k-1}{2}M^2\right)dL_r\right]. \tag{3}$$

Здесь: dL_r, dL_T — соответственно, элементарная работа трения и техническая работа, отнесенные к 1 кг газа на пути dx; $dL_r = \lambda\frac{w^2}{2g}\frac{dx}{D} = q_r\,dx$; $dL_T = q_T\,dx$; q_T и q_r — интенсивности распределения механических источников и источников трения.

2. Предельные состояния течений газа при переходе через скорость звука. Как известно, течениям газов в цилиндрической трубе свойственны предельные состояния, при наступлении которых дальнейшее непрерывное изменение параметров газа оказывается невозможным и происходит перестройка потока из стационарного в нестационарный. Наличие «особых» точек в потоке, характеризующих появление в них кризиса течения, обычно связано с переходом через скорость звука ($M = 1$).

Действительно, из уравнений (1) — (3) следует, что при произвольном распределении механических источников вдоль трубы (независимо от закона тепловыделения за счет трения) особые точки ($M = 1$)

обладают тем свойством, что в них появляются бесконечные градиенты параметров потока (давления, температуры, скорости и т. д.), т. е. $dp / dx = dT / dx = dw / dx = \ldots = \infty$, так как при $M = 1$, вообще говоря, $dL_T / dx \neq 0$; $dL_r / dx \neq 0$ и $\frac{dL_T}{dx} + k \frac{dL_r}{dx} \neq 0$.

Исследуем предельное состояние течения газа ($M = 1$) в цилиндрической трубе при наличии механического воздействия (подвод или отвод работы) и трения. Для этого выведем уравнение элементарного процесса, характеризуемого местным показателем политропы. Найдем из уравнения непрерывности $dw = w\,dv / v$, а из уравнения состояния $dT = \frac{p\,dv + v\,dp}{R}$ и подставим значения dw и dT в уравнение энергии $\frac{w\,dw}{g} + \frac{c_p}{A} dT + dL_T = 0$. Тогда $-v\,dp = p\,dv + \frac{(k-1)}{k} \frac{w^2}{g} \frac{dv}{v} + \frac{k-1}{k} dL_T$. Разделив обе части полученного равенства на $p\,dv$, получим

$$n = -\frac{v\,dp}{p\,dv} = 1 + (k-1)\,M^2 + \frac{k-1}{k} \; \frac{dL_T / dx}{p\,dv / dx}. \tag{4}$$

В предельном состоянии ($M = 1$) производные параметров газа обращаются в бесконечность, а следовательно, $dv / dx = \infty$. В то же время при произвольном законе распределения механических источников $q_T = dL_T / dx \neq \infty$. Следовательно, при $M = 1$ $n = k$, т. е. в особой точке процесс преобразования энергии газа стремится к предельно-изоэнтропному состоянию. Это, конечно, не означает, что исчезает трение и процесс становится обратимым. Это прежде всего свидетельствует о том, что при $M = 1$ изменение параметров газа происходит бесконечно быстро, и в сравнении с ним изменение энтропии вдоль оси трубы оказывается пренебрежимо малым, так что $ds / dT = ds / dp = ds / dw = \ldots = 0$. Вместе с тем это означает, что приток тепла от трения пренебрежимо мал по сравнению с изменением теплосодержания газа, и в этом смысле можно говорить об устремлении процесса к предельно обратимому состоянию.

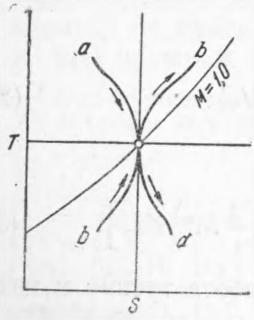

Рис. 1. Особенности предельного состояния течения с механическими источниками. a — турбина, b — компрессор

На рис. 1 представлены процессы течения газа в идеальном механическом сопле с трением в координатах $T - S$ отдельно для случая «компрессора» и «турбины».

3. О непрерывном переходе через $M = 1$ при наличии комбинации воздействий. Известно [2], что условием непрерывного перехода через $M = 1$ является изменение знака суммарного воздействия («Закон обращения воздействия»), причем в особой точке должно соблюдаться условие

$$dL_T = -k\,dL_r, \tag{5}$$

вытекающее из равенства нулю суммарного воздействия при $M = 1$. При соблюдении условия (5) в особой точке устраняются бесконечные производные параметров газа.

Легко заметить, что если основная возмущающая функция проходит через нуль при $M = 1$, то наличие дополнительного воздействия в зависимости от знака его сдвигает критическое сечение вверх или вниз по потоку (рис. 2a). Примером такой комбинации воздействий является центробежное сопло с непрерывным переходом через $M = 1$.

На рис. 3 представлена схема такого сопла. Цилиндрическая труба, открытая с двух сторон, вращается вокруг оси (перпендикулярной оси трубы) с равномерной угловой скоростью ω. Воздух (газ) перемещается вдоль радиуса вращения от периферии к центру, вследствие чего давление и плотность его непрерывно убывают, а скорость движения возрастает. Интенсивность распределения механических источ-

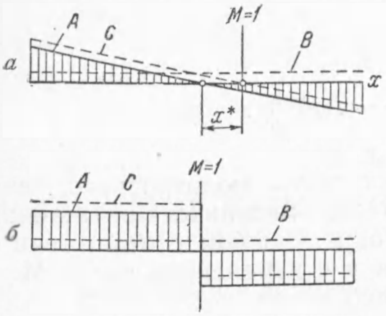

Рис. 2. Две схемы непрерывного перехода течения через скорость звука. A — основное воздействие, B — дополнительное, C — суммарное

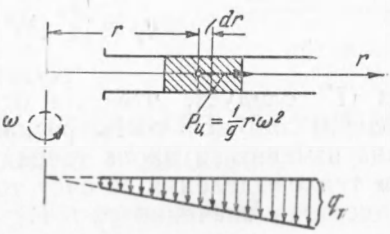

Рис. 3. Схема центробежного сопла

ников (от центробежных сил инерции) в данном случае равна $q_T = dL_T / dr = r\omega^2 / g$ и изменяется вдоль радиуса по линейному закону. На оси вращения ($r = 0$) $q_T = 0$. Следовательно, при отсутствии трения критическое сечение устанавливается на оси трубы. Наличие же трения сдвигает особую точку вниз по потоку, причем сдвиг сечения можно найти из условия (5) $\frac{\omega^2}{g} r\,dr = k \frac{\lambda\omega^2}{2g} \frac{dr}{D}$, откуда, полагая приближенно $w = a$, найдем

$$r^* = \frac{k\lambda}{\omega^2 D} a^2. \qquad (6)$$

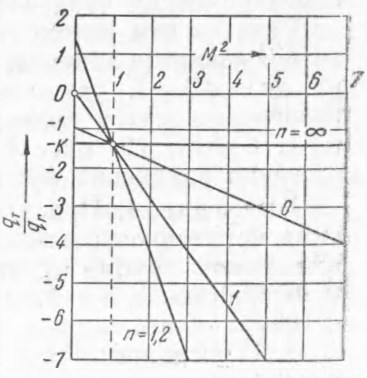

Рис. 4. Изменение функции q_T / q_r в политропном течении

Однако необходимо отметить, что вышеописанная схема перехода через $M = 1$ не является единственной. Непрерывный переход через $M = 1$ может иметь место и при скачкообразном обращении внешнего механического воздействия, когда не удовлетворяется условие (5). В этом случае, как нетрудно заметить, в особой точке не исчезают бесконечные градиенты параметров газа, а наличие дополнительного воздействия (например, трения) не сдвигает критического сечения (рис. 2*б*). Примером подобной комбинации воздействий является сочетание многоступенчатой дозвуковой турбины и сверхзвукового компрессора в одном агрегате с равномерным распределением механических источников.

4. О предельном состоянии политропных течений вязкого газа. Рассмотрим теперь вопрос о предельном состоянии политропных течений вязкого газа при наличии только механического воздействия.

Условием реализации политропного течения является $C = \frac{dQ/dx}{dT/dx} =$

$= \text{const}$, где: $dQ = dQ_r$ и $dT = \dfrac{dL_T + k\,\mathrm{M}^2\,dL_r}{\dfrac{c_p}{A}(\mathrm{M}^2 - 1)}$ (что вытекает из (2)).

Тогда

$$C = \frac{c_p(\mathrm{M}^2 - 1)\,q_r}{q_T + k\,\mathrm{M}^2\,q_r} = \text{const}, \tag{7}$$

откуда

$$q_T = \left[\frac{c_p}{C}(\mathrm{M}^2 - 1) - k\,\mathrm{M}^2\right]q_r. \tag{7'}$$

Из (7′) следует, что для осуществления политропного течения ($C = \text{const}$) интенсивность распределения механических источников должна изменяться вдоль течения в определенном соответствии с законом тепловыделения за счет трения и с изменением числа M.

Подставив значение q_T в (1), найдем:

$$\frac{w}{g}\,\frac{dw}{dx} = \left(k - \frac{c_p}{C}\right)q_r\,\mathrm{M}^2. \tag{8}$$

Из (8) и (7′) следует, что политропное течение в цилиндрической трубе при наличии только механических источников является непредельным, так как при любом конечном значении M ($< \infty$) производные параметров потока газа и величина q_T нигде не достигают бесконечности. Из (7′) также следует, что при $\mathrm{M} = 1$ $q_T = -kq_r$ и $dL_T = -k\,dL_r$, т. е. автоматически выполняется условие (5). Это полностью согласуется с выводом о непредельности политропных течений с механическим воздействием.

Вместе с тем необходимо отметить, что физически возможны только те политропные течения, в которых энтропия возрастает, что следует из $ds = dQ_r / T$, так как $dQ_r > 0$. Поэтому, например, невозможно реализовать путем подвода или отвода работы изоэнтропное течение (т. е. $C \neq 0$). На рис. 4 для различных политропных течений представлено изменение функции $q_T / q_r = f(\mathrm{M})$.

Выводы. 1. При произвольном законе распределения механических источников (независимо от закона тепловыделения за счет трения вдоль трубы) кризис течения связан с переходом через $\mathrm{M} = 1$. В особой точке $n = k$, т. е. имеет место предельно-изоэнтропное состояние.

2. Политропные течения вязкого газа при наличии механического воздействия непредельны, и поэтому у этих течений возможен непрерывный переход через $\mathrm{M} = 1$ даже при одностороннем внешнем механическом воздействии.

3. Принципиально возможны две схемы непрерывного перехода через $\mathrm{M} = 1$: а) при скачкообразном изменении внешнего суммарного воздействия (с сохранением бесконечных градиентов параметров газа); б) при равенстве нулю суммарного воздействия в особой точке (с устранением бесконечных градиентов параметров газа).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Христианович и др., Прикладная газовая динамика, М., 1948. [2] Л. А. Вулис, Термодинамика газовых потоков, М., 1950. [3] И. И. Новиков, ЖТФ, № 6 (1949). [4] А. А. Гухман и Н. В. Илюхин, Основы учения о теплообмене при течении газа с большой скоростью, 1951.