Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

МЕТРИКИ КЛАССА 2

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 I 1952)

В заметке (¹) нами были даны необходимые и достаточные условия того, что данная метрика $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ ($i, j = 1, \ldots, m$, ω^i — линейные формы от дифференциалов $du^1, \ldots, du^m$) имеет класс равный q, для случая, когда тип метрики $t \geqslant 3$.

Общая теория применима полностью и к случаю $q = 2$. Таким образом, подлежат исследованию метрики типа $t \leqslant 2$. В случае метрик класса 2 можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 1. *Для того чтобы метрика*

$$ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j, \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

типа $t \geqslant 2$ имела класс $\leqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы существовала система форм $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s = \lambda_{ij}^s\omega^j$, $\lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s$, $s = 1, 2$, $i = 1, \ldots, m$, удовлетворяющая условиям:

$$\sum_{s=1}^{2} [\psi_i^s\, \psi_j^s] = \Omega_{ij} = R_{ij.\,kl}\,[\omega^k\, \omega^l]; \tag{1}$$

$$\begin{gathered} [\Delta^1_{(i}\, \psi^2_{j)}] = [\Delta^2_{(i}\, \psi^1_{j)}] = 0; \\ [\Delta^1_{(i}\, \psi^1_{j)}] = [\Delta^2_{(i}\, \psi^2_{j)}] = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

где

$$\Delta_i^s = (\psi_i^s)' - [\omega_i^j\, \psi_j^s], \quad s = 1, 2, \quad i, j = 1, \ldots, m. \tag{3}$$

Условия (1) суть условия Гаусса, условия (2) эквивалентны условиям Кодацци — Риччи.

В дальнейшем рассматриваются метрики типа $t = 2$ и ранга > 4.

Согласно теореме 2 заметки (¹), в случае $t \geqslant 2$ ранг и тип метрики совпадают с соответствующими инвариантами поверхности, реализующей метрику. Как известно (²), поверхности типа 2 суть или поверхности ранга $r = 4, 5$ или, в случае $r > 5$, подповерхности гиперповерхности ранга 2.

Это означает, что формы $\omega_i^{m+s} = \psi_i^s$ должны удовлетворять альтернативе:

1) ранг $\{\psi_i^s\} > 5$, но зато имеется комбинация $\psi_i = \lambda\psi_i^1 + \mu\psi_i^2$ ранга 2;
2) ранг $\{\psi_i^s\} = 5$ (случай $r = 4$ исключается из рассмотрения).

В случае 1) можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $t = 2$ и $r > 5$, то система уравнений*

$$[\Phi_{\alpha\beta}\varphi] = 0, \tag{4}$$

где

$$\Phi_{\alpha\beta} = [\Omega_{(\alpha_1\beta_1}\,\Omega_{\alpha_2\beta_2)}]$$

и симметрирование производится по $(\alpha_1\alpha_2)$, $(\beta_1\beta_2)$ в отдельности, φ — линейная форма от $\omega^1, \ldots, \omega^m$, имеет два и только два линейно независимых решения φ_1, φ_2.

Это условие проверяется, а формы φ_1, φ_2 находятся с помощью операций линейной алгебры.

Пусть $I_1 \ldots I_m$ — репер, в котором

$$\{\omega^1, \omega^2\} \backsim \{\varphi_1, \varphi_2\}, \tag{6}$$

где значок $\backsim$ означает, что формы $\overline{\omega}^1$, $\overline{\omega}^2$ разлагаются по формам φ^1, φ^2 и обратно.

Репер $\{I_1 \ldots I_m\}$, формы ω^i, Ω_{ij} и компоненты g_{ij} находятся с помощью линейного алгоритма.

Пусть форма $\psi(d)$ определяется с помощью равенства

$$\psi(d) = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{31}(d, \delta_1) & \Omega_{31}(d, \delta_2) \\ \Omega_{32}(d, \delta_1) & \Omega_{32}(d, \delta_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta}}, \tag{7}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{12}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2, d) & \Omega_{12}(d, \delta_1) \\ \Omega_{23}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{23}(\delta_2, d) & \Omega_{23}(d, \delta_1) \\ \Omega_{31}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{31}(\delta_2, d) & \Omega_{31}(d, \delta_1) \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Образуем $(m + 1)$-мерную метрику

$$dS^2 = g_{ij}\,\Omega^i\Omega^j + t^2\psi^2, \tag{9}$$

где

$$\Omega^i = \omega^i + \delta_3^i\,dt + t\,\omega_3^i. \tag{10}$$

Легко видеть, что метрика dS^2 есть включающая по отношению к метрике ds^2, т. е. при $t = 0$ dS^2 переходит в $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j$.

Теорема 3. *Для того чтобы метрика $ds^2 = g_{ij}\,\omega^i\omega^j$ типа $t = 2$ и ранга > 5 имела класс $\leqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы метрика dS^2, построенная вышеуказанным образом, имела класс $\leqslant 1$.*

Рассмотрим случай 2), когда ранг метрики равен 5.

Рассмотрим систему

$$[\Phi_{ij}\varphi_i] = 0, \tag{11}$$

где i произвольно фиксировано, j меняется от 1 до m $(i = 1, \ldots, m)$.

Теорема 4. *Если метрика типа $t = 2$ имеет ранг 5, то возможны только два случая:*

а) *система* (11) *имеет только два линейно независимых решения φ_i^1, φ_i^2;*

б) *система* (11) *имеет три линейно независимых решения φ_i^1, φ_i^2, φ_i^3.*

В случае а), согласно теореме 6 ([1]), необходимое и достаточное условие разрешимости системы

$$\Omega_{ij} = \sum_{s=1}^{2} [\psi_i^s \, \psi_j^s], \quad i, j = 1, \ldots, m,$$

состоит в том, что система скалярных произведений

$$L_{ij11} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^2 \varphi_j^2]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}, \qquad L_{ij12} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^2 \varphi_j^1]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]},$$

$$L_{ij21} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^2]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}, \qquad L_{ij22} = \frac{[\Omega_{ij} \varphi_i^1 \varphi_j^1]}{[\varphi_i^1 \varphi_i^2 \varphi_j^1 \varphi_j^2]}$$

имеет класс 2.

Формы ψ_i^1, ψ_i^2 могут быть явно выражены через φ_i^1, φ_i^2 ([1]).

В силу теоремы 1, для того, чтобы метрика имела класс 2, необходимо и достаточно, чтобы определенные таким образом формы ψ_i^s удовлетворяли условиям (2).

В случае б) вновь оказывается возможным построить включающую метрику.

Пусть $I_1 \ldots I_m$ — репер, в котором

$$\omega^1, \ \omega^2, \ \omega^3 \backsim \varphi_i^1, \ \varphi_i^2, \ \varphi_i^3$$

(i произвольно фиксировано),

$$\psi = \frac{\begin{vmatrix} \Omega_{41}(d, \delta_1) & \Omega_{41}(d, \delta_2) \\ \Omega_{42}(d, \delta_1) & \Omega_{12}(d, \delta_2) \end{vmatrix}}{\sqrt{\Delta}},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \Omega_{12}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{12}(\delta_2, d) & \Omega_{12}(d, \delta_1) \\ \Omega_{24}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{24}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{24}(d, \delta_1) \\ \Omega_{41}(\delta_1, \delta_2) & \Omega_{11}(\delta_2, d) & \Omega_{41}(d, \delta_1) \end{vmatrix},$$

$$dS^2 = g_{ij} \overline{\Omega}^i \overline{\Omega}^j + t^2 \psi^2,$$

где

$$\overline{\Omega}^i = \omega^i + \delta_4^i \, dt + t\omega_4^i.$$

Тогда для того, чтобы метрика $ds^2 = g_{ij} \omega^i \omega^j$ имела класс $\leqslant 2$, необходимо и достаточно, чтобы dS^2 имела класс $\leqslant 1$.

Заметим, что мы рассматриваем метрику в репере общего положения, т. е. предполагаем, что все соотношения типа $f \neq 0$, которые могут быть получены в результате преобразования репера, выполняются.

Поступило
10 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Яненко, ДАН, 83, № 4 (1952). [2] Н. Н. Яненко, ДАН, 64, № 5 (1949).