

УДК 517.9

DOI 10.62595/1819-5245-2026-1-5-15

РАСПАД СЛАБОГО РАЗРЫВА В ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ ДВУХСКОРОСТНОЙ СРЕДЕ С ИСТОЧНИКАМИ ЭНЕРГИИ

О. Н. ШАБЛОВСКИЙ

*Учреждение образования «Гомельский государственный
технический университет имени П. О. Сухого»,
Республика Беларусь*

Рассмотрена двухкомпонентная двухскоростная среда, в которой присутствуют взаимодействующие друг с другом объемные источники энергии. Предмет исследования – система двух зацепляющихся волновых уравнений с двумя различающимися скоростями звука. Система является контрастной, если одна из скоростей значительно превосходит другую. Точное решение имеет двухкинковую структуру, и ему соответствуют функции источников, обладающие тригонометрической нелинейностью по отношению к искомым функциям. Дано решение задачи о распаде слабого разрыва и выполнен анализ динамических свойств волн, формирующихся в результате взаимодействия первой и второй компонент. Указаны условия существования дозвукового и сверхзвукового режимов движения границ возмущенной области. Определены нелинейные свойства амплитуд источников, обусловленные динамическими свойствами границ и отношением скоростей звука в первой и второй компонентах. Дан пример приближенного решения контрастной системы для нетривиального случая, когда произведение амплитуд функций источников равно единице.

Ключевые слова: двухскоростная динамическая система, объемный источник энергии, гетерогенные материалы, дозвуковая и сверхзвуковая волна, контрастная система.

Для цитирования. Шабловский, О. Н. Распад слабого разрыва в двухкомпонентной двухскоростной среде с источниками энергии / О. Н. Шабловский // Вестник Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого. – 2026. – № 1 (104). – С. 5–15. – DOI 10.62595/1819-5245-2026-1-5-15

DECAY OF A WEAK DISCONTINUITY IN A TWO-COMPONENT, TWO-VELOCITY MEDIUM WITH ENERGY SOURCES

O. N. SHABLOVSKY

*Sukhoi State Technical University of Gomel,
the Republic of Belarus*

The article considers a two-component, two-velocity medium containing interacting volumetric energy sources. The subject of the study is a system of two coupled wave equations with two different sound velocities. The system is regarded as a contrastive, if one of the velocities significantly exceeds the other. The exact solution has a two-kink structure and corresponds to source functions that exhibit trigonometric nonlinearity with respect to the unknown functions. A solution to the problem of the decay of a weak discontinuity is given, and an analysis of the dynamic properties of waves formed as a result of the interaction of the first and second components is performed. Conditions for the existence of subsonic and supersonic regimes of motion of the excitation area boundaries are indicated. Nonlinear properties of the source amplitudes are determined, caused by the dynamic properties of the boundaries and the ratio of the sound velocities in the first and second components. An example of an approximate solution of the contrast system is given for the nontrivial case when the product of the amplitudes of the source functions is equal to unity.

Keywords: two-velocity dynamic system, volumetric energy source, heterogeneous materials, subsonic and supersonic wave, contrast system.

For citation. Shablovskiy O. N. Decay of a weak discontinuity in a two-component, two-velocity medium with energy sources. *Vestnik Gomel'skogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta imeni P. O. Sukhogo*, 2026, no. 1 (104), pp. 5–15 (in Russian). DOI 10.62595/1819-5245-2026-1-5-15

Введение

Динамика волн в гетерогенных средах является объектом теоретических и экспериментальных исследований, ориентированных на создание новых технологических процессов, в которых применяются смеси твердых тел [1, 2]. Современное состояние физико-математического моделирования двухкомпонентных двухскоростных смесей конденсированных материалов представлено в работах [3–5]. Центральным пунктом в этих задачах являются высокоинтенсивные волновые нагрузки на гетерогенную систему: волны сжатия и разрежения, ударные волны. Эффективным средством воздействия на параметры физико-химического процесса служат объемные источники энергии. В статьях [6, 7] изучена двухскоростная динамическая система гиперболического типа: рассмотрены одномерные задачи, в которых присутствуют два типа волновых мод, распространяющихся с разными скоростями и взаимодействующих друг другом. В работе [8] получены некоторые точные решения уравнений двухскоростной гидродинамики. Еще один аспект данной проблемы – анализ двухкомпонентных контрастных систем, для которых коэффициенты переноса (например, коэффициенты диффузии) значительно отличаются один от другого. Основная часть исследований контрастных систем выполнена асимптотическими методами и относится к параболическим уравнениям, определяющим модели типа «реакция – диффузия» [9–12]. Известно, что вычислительное моделирование контрастных систем требует разработки сложных численных методов, позволяющих изучать окрестности пространственных областей, в которых наблюдаются большие градиенты искомых функций. Применительно к этому кругу задач полезно иметь нетривиальные аналитические решения, которые могут применяться при тестировании новых вычислительных алгоритмов. Сформулируем основные предпосылки данной работы:

1) заслуживает внимания именно гиперболическая система двух волновых уравнений с нелинейными объемными источниками энергии; взаимодействие первой и второй компонент характеризуется сцепляющимися друг за друга функциями источников;

2) отношение скоростей звука в первой и второй компонентах – существенно важный параметр двухскоростной системы; контрастную систему получаем, если эти две скорости звука значительно отличаются одна от другой;

3) задача о распаде слабого разрыва позволяет проанализировать динамические свойства волн, формирующихся в результате переплетающегося взаимодействия обеих компонент;

4) аналитическое описание системы «двухкомпонентная среда – нелинейные источники» предоставляет возможность тестирования численных алгоритмов решения двухскоростных гиперболических задач.

Цель данной статьи – построить аналитическое решение задачи о распаде слабого разрыва для двухскоростной системы волновых уравнений с нелинейными источниками.

Основное решение

Рассматриваем двухкомпонентную систему, поведение которой описывается волновыми уравнениями следующего вида:

$$\frac{\partial^2 \tau_i}{\partial t^2} - w_i^2 \frac{\partial^2 \tau_i}{\partial x^2} = k_v^{(i)}; \quad i = 1, 2. \quad (1)$$

Здесь t – время; x – декартова координата; $\tau_i = T_i - T_i^o$ – искомые функции, определяющие некоторые физические свойства (например, температуры) первой и второй компонент; T_i^o – равновесные (отсчетные) значения искомым функций; w_i – две скорости звука; $k_v^{(i)}(\tau_1, \tau_2)$ – функции источников, характеризующие взаимодействие первой и второй компонент. Возьмем масштабы w_b , τ_b , t_b и запишем соответствие между размерными и безразмерными величинами: $t/t_b \rightarrow t$; $[x/(w_b t_b)] \rightarrow x$; $\tau_i/\tau_b \rightarrow \tau_i$; $w_i/w_b \rightarrow w_i$; $[k_v^{(i)} t_b^2/\tau_b] \rightarrow k_v^{(i)}$; $i = 1, 2$. Таким образом, размерные и безразмерные уравнения (1) имеют одинаковую форму записи. Далее применяем следующие формулы:

$$x'_1 = x/w_1, \quad x'_2 = x/w_2 = c_1 x'_1, \quad c_1 = w_1/w_2, \quad c_2 = w_2/w_1.$$

Для определенности берем $0 < c_1 < 1$, т. е. $c_2 > 1$. Чем больше c_2 отличается от единицы, тем сильнее проявляется двухскоростной характер данной системы.

Функции τ_1 , τ_2 представим в форме, структура которой аналогична двухкинковому решению уравнения синус Гордона [13, с. 262]:

$$\tau_1 = \text{arctg}(E_1 + E_2), \quad \tau_2 = \text{arctg}(E_1 - E_2), \quad (2)$$

$$E_1 = \exp \zeta_1, \quad E_2 = \exp \zeta_2,$$

$$\zeta_1 = (f_1 + r)x'_1 + (f_1 - r)t, \quad \zeta_2 = (f_2 + s)x'_2 + (f_2 - s)t,$$

где f_1 , r , f_2 , s – постоянные величины. В дальнейшем наряду с этими четырьмя константами применяем также

$$x_1 = f_1 - r, \quad x_2 = f_1 + r, \quad y_1 = f_2 - s, \quad y_2 = f_2 + s. \quad (3)$$

Вдоль линий $\zeta_1 = \text{const}$ имеем $dx/dt = -w_1 x_1/x_2 = N_1$, где N_1 – скорость перемещения ζ_1 -линии. Применяя число Маха $M_1 = N_1/w_1$, получаем $M_1^2 - 1 = -4f_1 r/x_2^2$. Следовательно, для ζ_1 -линии имеем сверхзвуковой процесс ($M_1^2 > 1$) при $f_1 r < 0$; имеем дозвуковой процесс ($0 < M_1^2 < 1$) при $f_1 r > 0$. Для ζ_2 -линии справедливы аналогичные выражения: $\zeta_2 = \text{const}$, $dx/dt = -w_2 y_1/y_2 = N_2$, $M_2 = N_2/w_2$, $M_2^2 - 1 = -4f_2 s/y_2^2$. Значит, $M_2^2 > 1$ при $f_2 s < 0$ и $0 < M_2^2 < 1$ при $f_2 s > 0$. Для записи функций источников будет применять выражения

$$\theta_1 = \text{tg } \tau_1, \quad \theta_2 = \text{tg } \tau_2.$$

Непосредственной подстановкой можно проверить, что решению (2) соответствуют зацепляющиеся друг за друга источники:

$$k_v^{(1)} = \left[2f_1 r (\theta_1 + \theta_2) (\theta_1 \theta_2 - 1) + \frac{a_{22}}{2} (\theta_1 - \theta_2) (1 + \theta_1 \theta_2) - a_{12} \theta_1 (\theta_1^2 - \theta_2^2) \right] (1 + \theta_1^2)^{-2}; \quad (4)$$

$$k_v^{(2)} = \left[2f_2 s (\theta_1 - \theta_2) (1 + \theta_1 \theta_2) + \frac{b_{11}}{2} (\theta_1 + \theta_2) (1 - \theta_1 \theta_2) - b_{12} \theta_2 (\theta_1^2 - \theta_2^2) \right] (1 + \theta_2^2)^{-2}. \quad (5)$$

Данные функции обладают свойствами: если $\theta_i \rightarrow 0$ либо $\theta_i \rightarrow \pm\infty$, то $k_0^{(i)} \rightarrow 0$; $i = 1, 2$. Решение (2) удобно записать в виде

$$\theta_1 = E_1 + E_2, \quad \theta_2 = E_1 - E_2. \quad (6)$$

В правые части формул (4), (5) входят шесть коэффициентов $f_1 r$, a_{12} , a_{22} и $f_2 s$, b_{11} , b_{12} , зависящих от выбора четырех произвольных констант. Допустим, что в качестве исходных независимых параметров приняты f_1 , f_2 , r , s . Тогда имеем, согласно (3), следующие соотношения:

$$f_1 r = (x_2^2/4)(1 - c_2^2) - (b_{11}/4); \quad f_2 s = (y_2^2/4)(1 - c_1^2) - (a_{22}/4); \quad (7)$$

$$a_{12} = x_1 y_1 - c_1 x_2 y_2; \quad a_{22} = y_1^2 - c_1^2 y_2^2; \quad b_{12} = c_2 x_2 y_2 - x_1 y_1; \quad b_{11} = x_1^2 - c_2^2 x_2^2.$$

Можно поступить иначе. Допустим, что известны четыре параметра источников a_{12} , a_{22} , b_{11} , b_{12} (см. (4), (5)). Вычисляем $A_1 = x_1 y_1 = (a_{12} c_2 + b_{12} c_1)/(c_2 - c_1)$, $A_2 = x_2 y_2 = (a_{12} + b_{12})/(c_2 - c_1)$. Теперь нужно учесть, что $x_1^2 = b_{11} + c_2^2 x_2^2$, $y_1^2 = a_{22} + c_1^2 y_2^2$, и тогда $y_2^2 = c_2^2 [A_1^2 - a_{22}(b_{11} + x_2^2 c_2^2)] / (b_{11} + x_2^2 c_2^2) > 0$,

$$x_2^2 = \left[A_1^2 - A_2^2 - a_{22} b_{11} - \sqrt{(A_1^2 - A_2^2 - a_{22} b_{11})^2 - 4 a_{22} b_{11} A_2^2} \right] (2 a_{22} c_2^2)^{-1} > 0,$$

где $a_{22} < 0$, $b_{11} > 0$ и выполнено неравенство $y_1^2 > 0$. Коэффициенты $f_1 r$, $f_2 s$ вычисляем по указанным выше формулам (7).

Распад слабого разрыва

Физическая интерпретация решения (2), (6) состоит в следующем. В начальном ($t = 0$) состоянии имеем при $x = 0$ слабый разрыв функций $\tau_i(x, t = 0)$, $i = 1, 2$. Слева от разрыва: $x \leq 0$, $\tau_i = \tau_i^{(l)}(x)$. Справа от разрыва: $x \geq 0$, $\tau_i = \tau_i^{(r)}(x)$, причем $\tau_i^{(l)}(x = 0) = \tau_i^{(r)}(x = 0)$. Здесь терпят разрыв первого рода производные по координате x . При $t > 0$ этот слабый разрыв распадается на две волны, разбегающиеся в разные стороны (рис. 1). Вправо бежит волна $\zeta_1 = 0$, $x^{(r)} = N^{(r)} t$, $N^{(r)} = -w_1 x_1 / x_2$, $N^{(r)} > 0$. Фон перед этой волной определяется такими зависимостями (см. (6)), $E_1^{(r)} = 1$, $E_2^{(r)}(x) = \exp(x p^{(r)})$, $x \geq 0$, $p^{(r)} < 0$, $p^{(r)} = (y_2 / w_2) - (y_1 x_2 / w_1 x_1)$;

$$y_1 < 0, \quad y_2 < 0, \quad x_2 / x_1 < 0; \quad \theta_1^{(r)}(x) = 1 + E_2^{(r)}, \quad \theta_2^{(r)}(x) = 1 - E_2^{(r)}. \quad (8)$$

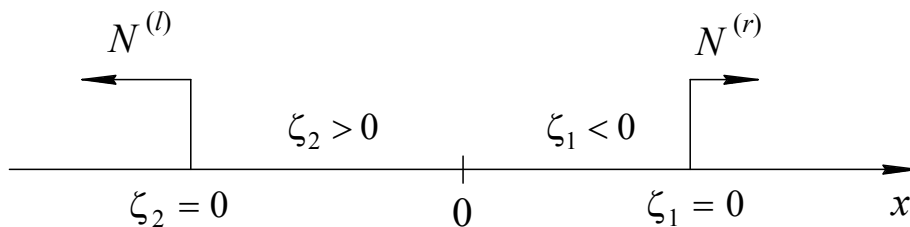


Рис. 1. Распад слабого разрыва на две разбегающиеся волны

Влево бежит волна $\zeta_2 = 0$, $x^{(l)} = N^{(l)}t$, $N^{(l)} = -w_2 y_1 / y_2$, $N^{(l)} < 0$. Фон перед этой волной имеет такой вид: $E_1^{(l)}(x) = \exp(xp_{(l)})$, $x \leq 0$, $p_{(l)} > 0$, $E_2^{(l)} = 1$, $p_{(l)} = (x_2/w_1) - (x_1 y_2 / w_2 y_1)$;

$$x_1 < 0, x_2 > 0, y_2/y_1 > 0; \theta_1^{(l)}(x) = 1 + E_1^{(l)}, \theta_2^{(l)}(x) = -1 + E_1^{(l)}. \quad (9)$$

На рис. 2 показан фон перед волнами возмущения, а также начальное состояние слабого разрыва: $x = 0$, $t = 0$, $\text{tg } \tau_1 = \theta_1 = 2$, $\text{tg } \tau_2 = \theta_2 = 0$. В исходной точке $x = 0$, $t \geq 0$ имеем: $E_1 = \exp(x_1 t)$, $x_1 < 0$; $E_2 = \exp(y_1 t)$, $y_1 < 0$, поэтому при $t \rightarrow 0$ будет $\theta_1(x=0) \rightarrow 0$, $k_0^{(i)}(x=0) \rightarrow 0$; $i = 1, 2$.

Неравенства $x_1 < 0$, $x_2 > 0$ (см. (9)) допускают дозвуковой и сверхзвуковой варианты: 1) $0 < f_1 < r$, т. е. $f_1 r > 0$, $M_1^2 \in (0, 1)$, и тогда $M_{(r)} = N^{(r)}/w_1 < 1$; 2) $r > (-f_1) > 0$, т. е. $f_1 r < 0$, $M_1^2 > 1$, и тогда $M_{(r)} > 1$. Неравенства $y_1 < 0$, $y_2 < 0$ (см. (8)) тоже дают два варианта: 1) $f_2 < (-s) < 0$, т. е. $f_2 s < 0$, $M_2^2 > 1$, и тогда $M_{(l)}^2 > 1$; 2) $f_2 < s < 0$, т. е. $f_2 s > 0$, $M_2^2 \in (0, 1)$, и тогда $M_{(l)}^2 \in (0, 1)$. Различные варианты решения задач о распаде слабого разрыва в пространственно-нелокальной среде изложены в [14].

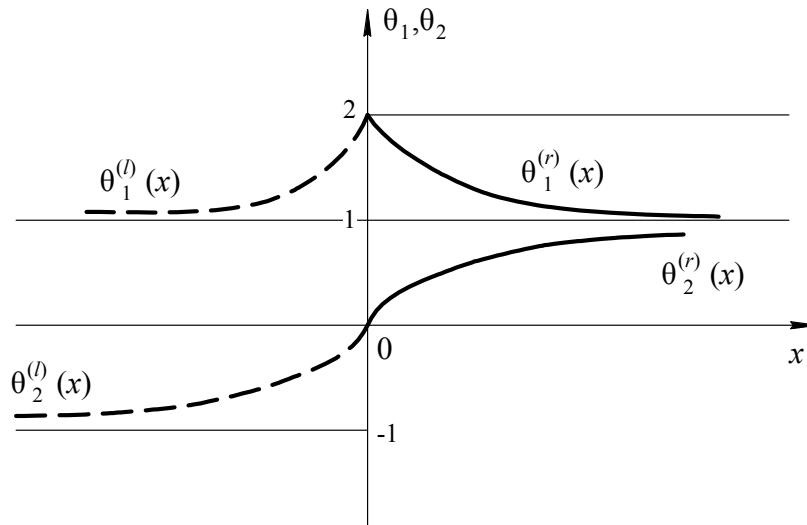


Рис. 2. Начальное состояние двухкомпонентной системы, содержащей слабый разрыв

Пример двухкомпонентной системы

Функции источников (4), (5) заключают в себе следующие полезные варианты: 1) $a_{22} = 2a_{12}$, $b_{11} = -2b_{12}$; 2) $a_{22} = -4f_1 r$, $b_{11} = -4f_2 s$; 3) $a_{12} = -2f_1 r$, $b_{12} = 2f_2 s$. Здесь в качестве примера возьмем $a_{22} = 0$, $b_{11} = 0$ и пусть входными параметрами являются a_{12} и $f_1 r < 0$. Отсюда следуют формулы: $b_{12} = -a_{12}c_2$, $x_2^2 = -4f_1 r / (c_2^2 - 1)$, $2f_2 s = (1 - c_1)a_{12}^2 / [(1 + c_1)2x_2^2]$, $y_1^2 = c_1^2 y_2^2$, $x_1^2 = c_2^2 x_2^2$, $c_2 x_2 y_2 = x_1 y_1 + b_{12}$. Знаки x_1 , x_2 , y_1 , y_2 следует выбирать на основе физической интерпретации решения. Для большей выразительности записи формул возьмем вместо $f_1 r$ константу a_* : $4f_1 r / a_{12} = (1 - c_1)a_*$. В результате имеем такие функции источников:

$$k_v^{(1)} = a_{12} \cos^4 \tau_1 (\theta_1 + \theta_2) [\theta_1 \theta_2 (1 + c_{11}) - \theta_1^2 - c_{11}], \quad c_{11} = (1 - c_1) a_* / 2; \quad (10)$$

$$k_v^{(2)} = c_2 a_{12} \cos^4 \tau_2 (\theta_1 - \theta_2) [\theta_1 \theta_2 (1 + c_{22}) + \theta_2^2 + c_{22}], \quad c_{22} = (1 - c_2) / (2a_*). \quad (11)$$

Содержащиеся здесь свободные константы a_{12} , a_* влияют на свойства решения (2) посредством выражений ζ_1 , ζ_2 (см. (3)). Для линий $\zeta_1 = \text{const}$ и $\zeta_2 = \text{const}$ имеем соответственно сверхзвуковой и дозвуковой режимы движения. Отметим еще, что $\text{sgn } a_{12} = -\text{sgn } a_*$.

Обсудим поведение этих источников в задаче о распаде слабого разрыва. Для определенности примем $a_{12} > 0$, $a_* < 0$, и тогда $c_{11} < 0$, $c_{22} > 0$. На левой границе $\zeta_2 = 0$, $\theta_1 - \theta_2 = 2$ (см. (6)),

$$k_v^{(1)} = A_l^{(1)} \cos^4 \tau_1, \quad k_v^{(2)} = A_l^{(2)} \cos^4 \tau_2; \quad (12)$$

$$A_l^{(1)} = 2a_{12} (\theta_1 - 1) [c_{11} \theta_1^2 - 2\theta_1 (1 + c_{11}) - c_{11}], \quad \theta_1 = \theta_1^{(l)} = \theta_1 (\zeta_2 = 0);$$

$$A_l^{(2)} = 2c_2 a_{12} [\theta_1^2 (1 + c_{22}) - \theta_1 (2c_{22} + 4) + 4 + c_{22}].$$

Функции $A_l^{(i)}(\theta_1)$, $i = 1, 2$ можно интерпретировать как амплитуды колебаний, зависящие от процесса взаимодействия первой и второй компонент системы. Качественные свойства этих амплитуд показаны на рис. 3. На правой границе $\zeta_1 = 0$, $\theta_1 + \theta_2 = 2$ (см. (6)),

$$k_v^{(1)} = A_r^{(1)} \cos^4 \tau_1, \quad k_v^{(2)} = A_r^{(2)} \cos^4 \tau_2; \quad (13)$$

$$A_r^{(1)} = 2a_{12} [-\theta_1^2 (2 + c_{11}) + 2\theta_1 (1 + c_{11}) - c_{11}], \quad \theta_1 = \theta_1^{(r)} = \theta_1 (\zeta_1 = 0);$$

$$A_r^{(2)} = 2c_2 a_{12} (\theta_1 - 1) [-c_{22} \theta_1^2 + 2\theta_1 (c_{22} - 1) + 4 + c_{22}].$$

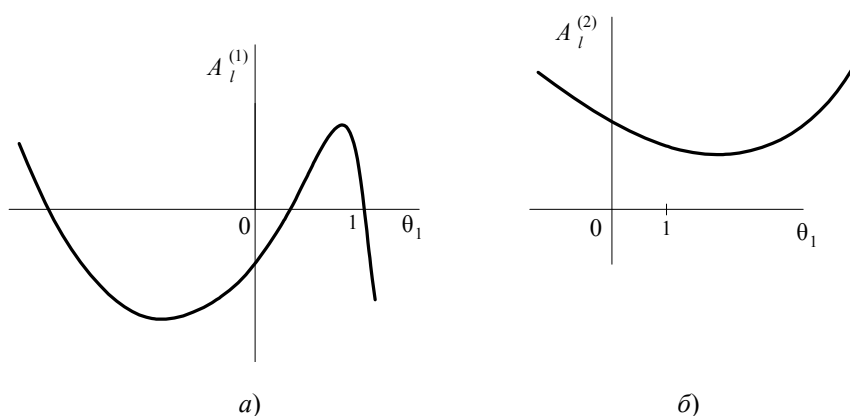


Рис. 3. Нелинейные свойства амплитуд колебаний источников (12) на левой границе возмущенной области:
а – для источника $k_v^{(1)}$; б – для источника $k_v^{(2)}$

Качественные свойства этих амплитуд изображены на рис. 4. Из сопоставления рис. 3 и рис. 4 ясно, что различия между источниками проявляются именно на левой и правой границах. Действительно, зависимости $A_l^{(1)}(\theta_1^{(l)})$ и $A_r^{(2)}(\theta_1^{(r)})$, относящиеся

к разным источникам и разным границам (рис. 3, *a* и рис. 4, *z*), обладают знакопеременной выпуклостью. Вместе с тем наблюдается знакопостоянная выпуклость амплитуд $A_l^{(2)}(\theta_1^{(l)})$ и $A_r^{(1)}(\theta_1^{(r)})$, причем направление выпуклости функции $A_r^{(1)}(\theta_1^{(r)})$ зависит от интервала, в котором изменяется параметр c_{11} (рис. 4, *a–в*). Эти нелинейные свойства амплитуд обусловлены двумя причинами: 1) различие динамических свойств границ

$$\theta_1^{(l)}(t) - \theta_2^{(l)}(t) = 2, \quad \theta_1^{(r)}(t) + \theta_2^{(r)}(t) = 2;$$

2) взаимодействие между первой и второй компонентами явным образом зависит от параметра c_{11} , который несет информацию о скоростях звука (константа $c_1 = w_1/w_2$) и о свойствах источников (константа a_*).

Влияние нелинейных свойств функции источника на структуру генерируемых им колебаний и волн рассматривалось в работах [15–17]. Отметим еще, что в частном случае двухкомпонентной односкоростной системы ($c_1 = c_2 = 1$) функции (10), (11) можно записать в таком виде:

$$k_v^{(1)} = \frac{a_{12} \sin 2\tau_1}{4 \cos^2 \tau_2} (\cos 2\tau_2 - \cos 2\tau_1), \quad k_v^{(2)} = \frac{a_{12} \sin 2\tau_2}{4 \cos^2 \tau_1} (\cos 2\tau_2 - \cos 2\tau_1).$$

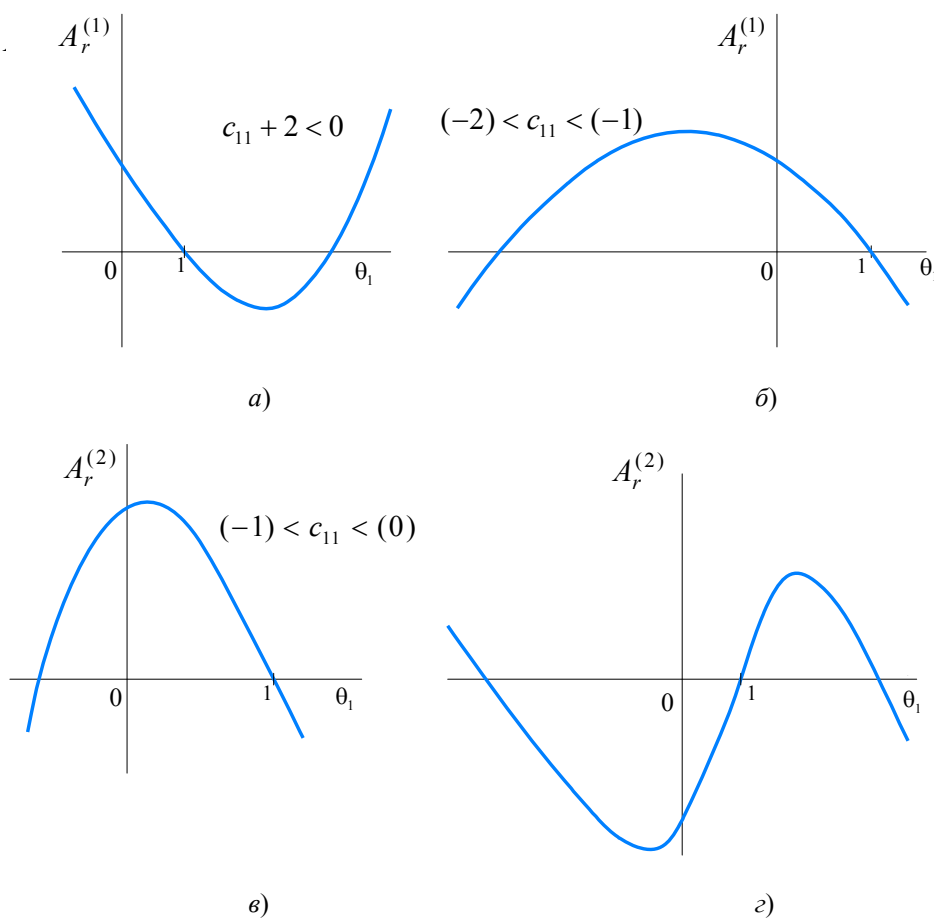


Рис. 4. Нелинейные свойства амплитуд колебаний источников (13) на правой границе возмущенной области:
a–в – для источника $k_v^{(1)}$; *z* – для источника $k_v^{(2)}$

Краевая задача

В начальном ($t = 0$) состоянии левая и правая границы области находятся в начале координат, $x^{(l)}(0) = x^{(r)}(0) = 0$. При $t > 0$ источники (10), (11) генерируют двух-скоростной процесс между разбегающимися неизвестными границами $x^{(l)}(t)$, $x^{(r)}(t)$. Входными параметрами являются по-прежнему $a_{12} > 0$ и $f_1 r < 0$. Это дает возможность вычислить все четыре константы f_1 , f_2 , r , s , входящие в решение (2), (6) (см. в тексте формулы, предшествующие (10)). Знаки величин $f_2 s > 0$, $x_1 < 0$, $x_2 > 0$, $y_1 < 0$, $y_2 < 0$, $b_{12} < 0$ такие же, как и в предыдущем случае (8), (9). Неизвестными функциями являются $\tau_i(x, t)$, $i = 1, 2$, а также координаты левой и правой границ. Для системы уравнений (1) в области $x \in [x^{(l)}, x^{(r)}]$ краевая задача должна содержать шесть граничных условий по отношению к координате x . Например, можно поступить так. В исходной точке $x = 0$ заданы зависимости искомых функций от времени:

$$x = 0, \quad \theta_1(t) = E_1(x = 0, t) + E_2(x = 0, t); \quad \theta_2(t) = E_1(x = 0, t) - E_2(x = 0, t).$$

На левой и правой неизвестных границах искомые функции нелинейным (экспоненциальным и тригонометрическим) образом зависят от координат этих границ:

$$x = x^{(l)}(t), \quad \theta_1 = \exp[(x_2 x^{(l)}/w_1) + x_1 t] + \exp[(y_2 x^{(l)}/w_2) + y_1 t],$$

$$\theta_1(x^{(l)}, t) - \theta_2(x^{(l)}, t) = 2;$$

$$x = x^{(r)}(t), \quad \theta_2 = \exp[(x_2 x^{(r)}/w_1) + x_1 t] - \exp[(y_2 x^{(r)}/w_2) + y_1 t],$$

$$\theta_1(x^{(r)}, t) + \theta_2(x^{(r)}, t) = 2.$$

Решение этой тестовой краевой задачи дается формулами (2), (6), а скорости границ постоянны

$$dx^{(l)}/dt = -w_2 y_1 / y_2, \quad dx^{(r)}/dt = -w_1 x_1 / x_2.$$

Данный подход позволяет анализировать в явном виде двухкомпонентную систему, в которой отношение скоростей звука $c_1 = w_1/w_2$ не обязательно малый параметр: это может быть любое конечное число из интервала $(0, 1)$.

Контрастная система

Рассмотрим контрастную двухкомпонентную систему, в которой $c_1 = \varepsilon \ll 1$ является малой положительной величиной. Для констант f_1 , f_2 , s (см. (2), (3)) примем следующие их связи с ε : $f_1 = \varepsilon r_1 - r$, $f_2 = \varepsilon r_2$, $s = \varepsilon s_1$, т. е. теперь работаем с r_1 , r_2 , s_1 вместо f_1 , f_2 , s :

$$x_1 = \varepsilon r_1 - 2r, \quad x_2 = \varepsilon r_1, \quad y_1 = \varepsilon(r_2 - s_1), \quad y_2 = \varepsilon(r_2 + s_1).$$

Эти выражения следует применять при подсчете волновых координат ζ_1 , ζ_2 . Далее находим

$$a_{12} = \varepsilon[2r(s_1 - r_2)] + O(\varepsilon^2); \quad a_{22} = O(\varepsilon^2); \quad b_{12} = \varepsilon[r_1(r_2 + s_1) + 2r(r_2 - s_1)] + O(\varepsilon^2), \quad (14)$$

$$b_{11} = (4r^2 - r_1^2) + \varepsilon(-4r_1 r) + O(\varepsilon^2), \quad f_1 r = -r^2 + \varepsilon(r_1 r) + O(\varepsilon^2), \quad f_2 s = O(\varepsilon^2).$$

Удерживая в (14) только невозмущенные по ε значения этих коэффициентов, получаем из (4), (5) следующие функции источников

$$k_v^{(1)} = r^2 A_{12} \sin[2(\tau_1 + \tau_2)] + O(\varepsilon), \quad k_v^{(2)} = \left(r^2 - \frac{r_1^2}{4} \right) A_{21} \sin[2(\tau_1 + \tau_2)] + O(\varepsilon), \quad (15)$$

$$A_{12} = \cos^2 \tau_1 / \cos^2 \tau_2 = (1/A_{21}).$$

Такая форма записи выразительно демонстрирует различия нелинейных свойств амплитуд $A_{12}(\tau_1, \tau_2)$ и $A_{21}(\tau_1, \tau_2)$, удовлетворяющих связи $A_{12}A_{21} = 1$. Здесь r^2 и r_1^2 – свободные параметры источников (15). Для задачи о распаде слабого разрыва скорости границы определяются значениями чисел Маха:

$$M_{(l)}^2 = 1 - [4s_1 r_2 / (s_1 + r_2)^2] + O(\varepsilon), \quad M_{(r)}^2 = 1 + [4r^2 / (\varepsilon^2 r_1^2)] + O(\varepsilon^{-1}).$$

Заключение

Двухкомпонентная двухскоростная система (1) с источниками (4), (5) имеет точное решение (2), (6), содержащее четыре свободные константы. Выбор этих констант дает возможность строить функции источников $k_v^{(1)}$, $k_v^{(2)}$ различной аналитической структуры. Получено решение задачи о распаде слабого разрыва на две волны, разбегающиеся в разные стороны (рис. 1, 2). Определены дозвуковой и сверхзвуковой режимы распространения волн. Выполнен подробный анализ зацепляющихся друг за друга источников (10), (11) и указаны нелинейные свойства их амплитуд (12), (13), (рис. 3, 4). Представлена тестовая краевая задача в области с неизвестными подвижными границами. Дан пример контрастной системы, для которой скорости звука в первой и второй компонентах сильно различаются.

Литература

1. Кардашев, Г. А. Физические методы интенсификации процессов химической технологии / Г. А. Кардашев. – М. : Химия, 1990. – 208 с.
2. Третьяков, Ю. Д. Введение в химию твердофазных материалов / Ю. Д. Третьяков, В. И. Путляев. – М. : Изд-во Моск. ун-та : Наука, 2006. – 400 с.
3. Шугрин, С. М. Двухскоростная гидродинамика и термодинамика / С. М. Шугрин // Прикладная механика и техническая физика. – 1994. – Т. 35, № 4. – С. 41–59.
4. Рыков, Ю. Г. Возникновение неклассических скачков в одной модели течения двухкомпонентной, двухскоростной сплошной среды / Ю. Г. Рыков, В. Г. Лысов, О. Б. Федоритова // Препринты Института прикладной математики имени М. В. Келдыша. – 2012. – № 74. – С. 1–20.
5. Федоров, А. В. Структура ударных волн в смеси конденсированных сред с различными давлениями / А. В. Федоров // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 104–117. – DOI 1014529/mmp140109
6. Белишев, М. И. Эффекты, связанные с совпадением скоростей в двухскоростной динамической системе / М. И. Белишев, А. В. Зуров // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова. – 2000. – Т. 264. – С. 44–65.
7. Пестов, А. Л. Об обратной задаче для одномерной двухскоростной динамической системы / А. Л. Пестов // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения Математического института имени В. А. Стеклова. – 2014. – Т. 426. – С. 150–188.

8. Васильев, Г. С. Инвариантные подмодели системы уравнений двухскоростной гидродинамики с равновесием фаз по давлению / Г. С. Васильев, Жиан-Ган Тан, Б. Ж. Мамасолиев // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т. 15. – С. 585–602. – DOI 10.17377/semi.2018.15.047
9. Структуры и хаос в нелинейных средах / Т. С. Ахромеева, С. П. Курдюмов, Г. Г. Малинецкий, А. А. Самарский. – М. : Физматлит, 2007. – 488 с.
10. Нефедов, Н. Н. Существование и устойчивость стационарного решения с пограничным слоем системы уравнений реакция–диффузия с граничными условиями Неймана / Н. Н. Нефедов, Н. Н. Дерюгина // Теоретическая и математическая физика. – 2022. – Т. 212, № 1. – С. 83–94. – DOI 10.4213/tmf10255
11. Мельникова, А. А. Периодические изменения автоволнового фронта в двухмерной системе параболических уравнений / А. А. Мельникова, Н. Н. Дерюгина // Моделирование и анализ информационных систем. – 2018. – Т. 25, № 1. – С. 112–124. – DOI 10.18255/1818-1015-2018-1-112-124
12. Левашова, Н. Т. Существование и устойчивость стационарного решения системы уравнений диффузии в среде с разрывными характеристиками при различных условиях квазимонотонности / Н. Т. Левашова, Б. В. Тищенко // Теоретическая и математическая физика. – 2022. – Т. 212, № 1. – С. 62–81. – DOI <https://doi.org/10.4213/tmf10217>
13. Табор, М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике / М. Табор. – М. : Эдиториал УРСС, 2001. – 320 с.
14. Шабловский, О. Н. Распад слабого разрыва и распространение волн в нелокальной среде с источниками / О. Н. Шабловский // Вестник Балтийского федерального университета имени И. Канта. – 2020. – № 1. – С. 84–96.
15. Шабловский, О. Н. Динамика неустойчивых решений волнового уравнения с источниками / О. Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2020. – Т. 12, № 4. – С. 51–61. – DOI 10.14529/mmp200406
16. Шабловский, О. Н. Волновое уравнение с кубической нелинейностью и возбуждение колебаний в системе «среда–источник» / О. Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2021. – Т. 13, № 4. – С. 44–56. – DOI 10.14529/mmp210406
17. Шабловский, О. Н. Примеры точных решений нелокального волнового уравнения с нелинейными источниками / О. Н. Шабловский // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математика. Механика. Физика». – 2023. – Т. 15, № 4. – С. 30–37. – DOI 10.14529/mmp230404

References

1. Kardashev G. A. *Physical methods of intensification of chemical technology processes*. Moscow, Khimiya Publ., 1990. 208 p. (in Russian).
2. Tretyakov Yu. D., Putlyaev V. I. *Introduction to the chemistry of solid-phase materials*. Moscow, Izdatel'stvo Moskovskogo universiteta. Nauka, 2006. 400 p. (in Russian).
3. Shugrin S. M. Two-speed hydrodynamics and thermodynamics. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika = Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1994, vol. 35, no. 4, pp. 41–59 (in Russian).
4. Rykov Yu. G., Lysov V. G., Fedoritova O. B. The emergence of non-classic shocks in a flow model of two-component, two-velocity medium. *Preprinty Instituta prikladnoi matematiki im. M. V. Keldysha RAN = Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 2012, no. 74, 20 p. (in Russian).
5. Fedorov A. V. The structure of shock waves in a mixture of condensed media with different pressures. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematicheskoe modelirovanie i programmirovaniye»*, 2014, vol. 7, no. 1, pp. 104–117 (in Russian). <https://doi.org/1014529/mmp140109>

6. Belishev M. I., Zurov A. V. Effects related to the coincidence of velocities in a two-speed dynamic system. *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*, 2000, vol. 264, pp. 44–65 (in Russian).
7. Pestov A. L. On the inverse problem for a one-dimensional two-speed dynamic system. *Zapiski nauchnykh seminarov Sankt-Peterburgskogo otdeleniya Matematicheskogo instituta imeni V. A. Steklova*, 2014, vol. 426, pp. 150–188 (in Russian).
8. Vasiliev G. S., Zhang-Gan Tan, Mamasoliev B. J. Invariant submodels of a system of equations of two-velocity hydrodynamics with pressure phase equilibrium. *Sibirskie elektronnye matematicheskie izvestiya = Siberian Electronic Mathematical Reports*, 2018, vol. 15, pp. 585–602 (in Russian). <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.047>
9. Akhromeeva T. S., Kurdyumov S. P., Malinetsky G. G., Samarsky A. A. *Structures and chaos in nonlinear media*. Moscow, Fizmatlit publ., 2007. 488 p. (in Russian).
10. Nefedov N. N., Deryugina N. N. Existence and stability of a stationary solution with a boundary layer of the reaction-diffusion equation system with Neumann boundary conditions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2022, vol. 212, no. 1, pp. 83–94 (in Russian). <https://doi.org/10.4213/tmf10255>
11. Melnikova A. A., Deryugina N. N. Periodic changes of the autowave front in a two-dimensional system of parabolic equations. *Modeling and analysis of information systems*, 2018, vol. 25, no. 1, pp. 112–124 (in Russian). <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2018-1-112-124>
12. Levashova N. T., Tishchenko B. V. The existence and stability of a stationary solution of a system of diffusion equations in a medium with discontinuous characteristics under various quasi-monotonicity conditions. *Teoreticheskaya i matematicheskaya fizika*, 2022, vol. 212, no. 1, pp. 62–81 (in Russian). <https://doi.org/10.4213/tmf10217>
13. Tabor M. *Chaos and integrability in nonlinear dynamics*. Editorial URSS Publ., 2001. 320 p. (in Russian).
14. Shablovsky O. N. The weak rupture decay and wave propagation in a non-local medium with sources. *Bulletin of the Baltic Federal University named after I. Kant*, 2020, no. 1, pp. 84–96 (in Russian).
15. Shablovsky O. N. The dynamics of unstable solutions for the wave equation with sources. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. The series "Mathematics. Mechanics. Physics"*, 2020, vol. 12, no. 4, pp. 51–61 (in Russian). <https://doi.org/10.14529/mmph200406>
16. Shablovsky O. N. The wave equation with cubic nonlinearity and excitation of oscillations in the "medium-source" system. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*, 2021, vol. 13, no. 4, pp. 44–56 (in Russian). <https://doi.org/10.14529/mmph210406>
17. Shablovsky O. N. Examples of exact solutions of a non-local wave equation with nonlinear sources. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya "Matematika. Mekhanika. Fizika"*, 2023, vol. 15, no. 4, pp. 30–37 (in Russian). <https://doi.org/10.14529/mmph230404>

Поступила 17.12.2025 г.