Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. А. ЧУНИХИН

ОБ ОСЛАБЛЕНИИ УСЛОВИЙ В ТЕОРЕМАХ ТИПА СИЛОВА

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 15 II 1952)

§ 1. Наши предыдущие исследования ([1–9]) показали, что в условиях теорем типа Силова, т. е. теорем, устанавливающих существование и сопряженность подгрупп, порядки которых взаимно просты с их индексами, важное значение имеют свойства факторов нормальных рядов группы. Именно рассмотрение рядов подгрупп явилось тем объединяющим и обобщающим методом, который позволил вскрыть и лучше осмыслить единую природу таких известных, но ранее рассматривавшихся отдельно, теорем теории групп, как теоремы Силова, Голла и Шура — Цассенхауза. При этом в условия первоначально полученных нами теорем ([1–5], [7]) понятие инвариантной подгруппы входило двояко: во-первых, через посредство понятия нормального ряда и, во-вторых, через условия, накладываемые на факторы этих рядов. В работах ([6], [9]) мы показали, что все эти теоремы остаются справедливыми, если в их условиях нормальные ряды подгрупп заменить рядами более общего вида (П-перестановочными и П-полуинвариантными), видоизменив при этом также и понятие фактора ряда ([6]).

Однако понятие инвариантной подгруппы не удалось тогда исключить из условий, которым приходилось подчинять обобщенные факторы рассматриваемых рядов.

Приводимые ниже наши дальнейшие результаты показывают, что подобное исключение является возможным.

§ 2. В настоящей статье мы применяем наши прежние обозначения и определения ([1–9]). Приводим их здесь для полноты изложения: Π — некоторое непустое множество простых чисел; $\mathfrak{G}$ — всегда (если специально не оговорено противное) конечная группа порядка g; всякое число $d>1$, делящее g и такое, что каждый его простой делитель входит в Π и $(d, g/d)=1$, а также и 1, назовем Π-силовским делителем порядка g группы $\mathfrak{G}$; если $\mathfrak{G}_1$ — некоторая подгруппа порядка g_1 $(1 \leqslant g_1 \leqslant g)$ из $\mathfrak{G}$, то совокупность всех подгрупп из $\mathfrak{G}$, содержащих $\mathfrak{G}_1$ (включая также и $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{G}_1$), назовем фактор-структурой группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе $\mathfrak{G}_1$ и обозначим ее через $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$; число g/g_1 назовем индексом $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$.

Пусть b_1 — наибольший Π-силовский делитель числа g/g_1. Тогда в случае, если $b_1=1$ или же если при $b_1>1$ фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ содержит по крайней мере одну подгруппу $\mathfrak{B}_1$ порядка $b_1 g_1$, имеющую нормальный ряд, проходящий через $\mathfrak{G}_1$ и у которого на участке от $\mathfrak{B}_1$ до $\mathfrak{G}_1$ все индексы являются простыми числами из Π, причем все подгруппы порядка $b_1 g_1$ из $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{B}_1$ в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа $\Pi 1$. Если $g/g_1 = a_1 b_1$ и если фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ типа $\Pi 1$ содержит подгруппу $\mathfrak{A}_1$ порядка $a_1 g_1$, причем все подгруппы порядка $a_1 g_1$ из $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа П2. Если $\mathfrak{G}//\mathfrak{E}$, где $\mathfrak{E}$ — единичная подгруппа $\mathfrak{G}$, имеет тип П1 или П2, то и $\mathfrak{G}$ назовем, соответственно, группой типа П1 или П2. Единичную группу $\mathfrak{E}$ мы, по определению, причисляем к разрешимым группам, причем единственным ее нормальным рядом считаем ряд $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}$. Пусть $g = ab$, где b — наибольший П-силовский делитель числа g; тогда подгруппу $\mathfrak{G}_1$ назовем П-перестановочной в $\mathfrak{G}$, если $b = 1$ или же если при $b > 1$ $\mathfrak{G}_1$ перестановочна с любой силовской подгруппой порядка p^α группы $\mathfrak{G}$, причем p пробегает значения всех простых делителей числа b. Если $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, то ряд $\mathfrak{G} \supset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$, у которого каждый последующий член является П-перестановочной подгруппой предыдущего, и ряд $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}$ при $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ назовем П-перестановочным рядом $\mathfrak{G}$. П-перестановочную подгруппу $\mathfrak{G}_1$ группы $\mathfrak{G}$ назовем П-полуинвариантной в $\mathfrak{G}$, если $a = 1$ или же если при $a > 1$ $\mathfrak{G}_1$ перестановочна с любым элементом $\mathfrak{G}$, порядок которого есть любая степень любого простого числа, делящего a. Если $\mathfrak{G} \neq \mathfrak{E}$, то ряд $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{G}_1 \supset \cdots \supset \mathfrak{G}_l = \mathfrak{E}$, у которого всякий последующий член есть П-полуинвариантная подгруппа предыдущего, и ряд $\mathfrak{E}, \mathfrak{E}$ при $\mathfrak{G} = \mathfrak{E}$ назовем П-полуинвариантным рядом $\mathfrak{G}$.

Введем теперь еще следующие новые определения.

Определение 1. Если $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ содержит подгруппу $\mathfrak{B}_1$ порядка $b_1 g_1$ и если $b_1 = 1$ или же если при $b_1 > 1$ у $\mathfrak{B}_1$ имеется такой П-перестановочный ряд, проходящий через $\mathfrak{G}_1$, что на участке от $\mathfrak{B}_1$ до $\mathfrak{G}_1$ все его индексы являются простыми числами из П, причем к тому же все подгруппы порядка $b_1 g_1$ из $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{B}_1$, то $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа П$*$1.

Определение 2. Если фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{E}$ типа П$*$1, то и группу $\mathfrak{G}$ назовем группой типа П$*$1.

Из определения 2 на основании определения 1 следует, что группа $\mathfrak{G}$ тогда и только тогда является группой типа П$*$1, если она имеет подгруппы порядка b, причем все они сопряжены и каждая из них при $b > 1$ имеет П-перестановочный ряд, все индексы которого являются простыми числами из П.

Теорема 1. *Если группа $\mathfrak{G}$ имеет* П-*перестановочный ряд, все индексы которого простые числа из* П *или их степени, то $\mathfrak{G}$ — разрешимая группа.*

Теорема 2. *Группы типов* П$*$1 *и* П1 *совпадают.*

Теорему 2, очевидно, можно было бы сформулировать и так:

Всякая фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{E}$ типа П$*$1 *будет также и типа* П1, *и обратно.*

Но можно построить примеры, показывающие, что при $\mathfrak{G}_1 \neq \mathfrak{E}$ существуют фактор-структуры $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ типа П$*$1, не являющиеся в то же время фактор-структурами типа П1. Простейший из них дает неабелева группа $\mathfrak{G}$ 6-го порядка. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — ее подгруппы соответственно порядков 2 и 3. Тогда $\mathfrak{A}$ неинвариантна в $\mathfrak{G}$.

Положив П $= \{3\}$, рассмотрим ряд $\mathfrak{G} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \supset \mathfrak{A} \supset \mathfrak{E}$. Он будет, очевидно, П-перестановочным рядом, но не будет рядом нормальным.

Фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{A}$ будет типа П$*$1, но не будет типа П1.

Можно построить подобные примеры и для П, состоящего из любого числа элементов.

Эти примеры показывают, что нижеследующая теорема 3 является содержательным обобщением теоремы 3 нашей работы ([6]).

Теорема 3. *Для того чтобы конечная группа $\mathfrak{G}$ была типа* П1, *необходимо и достаточно, чтобы у $\mathfrak{G}$ существовал такой* П-*перестановочный ряд, все фактор-структуры которого были бы типа* П$*$1.

Теорема 3 позволяет ослабить условия в 3-м случае теоремы Шура — Цассенхауза ([10]). Получается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть $\mathfrak{G}$ — конечная группа порядка mn, где $(m, n) = 1$, а пусть Π обозначает совокупность всех простых делителей числа m. Если $\mathfrak{G}$ содержит такую подгруппу $\mathfrak{N}$ порядка n, что $\mathfrak{G}//\mathfrak{N}$ типа $\Pi*1$, то $\mathfrak{G}$ будет типа $\Pi 1$.*

§ 3. То ослабление условий, которое в первом направлении наших исследований — в направлении теорем Силова и Голла — дает теорема 3 настоящей статьи, можно также осуществить, как мы покажем ниже, и для второго направления — для наших теорем ([8], [9]) типа Шура — Цассенхауза.

Определение 3. Если фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ типа $\Pi*1$ содержит подгруппу $\mathfrak{A}_1$ порядка $a_1 g_1$ и если все подгруппы порядка $a_1 g_1$ из $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ сопряжены с $\mathfrak{A}_1$ в $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{G}//\mathfrak{G}_1$ назовем фактор-структурой типа $\Pi*2$.

Определение 4. Если фактор-структура $\mathfrak{G}//\mathfrak{E}$ типа $\Pi*2$, то и $\mathfrak{G}$ назовем группой типа $\Pi*2$.

На основании этого определения и теоремы 2 получается

Теорема 5. *Группы типов $\Pi*2$ и $\Pi 2$ совпадают.*

Повторяя теперь рассуждения нашей статьи ([9]), но с учетом теоремы 5, получаем следующую теорему:

Теорема 6. *Для того чтобы конечная группа $\mathfrak{G}$ была типа $\Pi 2$, необходимо и достаточно, чтобы у $\mathfrak{G}$ существовал Π-полуинвариантный ряд, все фактор-структуры которого были бы типа $\Pi*2$.*

Поступило
11 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, **55**, № 6 (1947). [2] С. А. Чунихин, ДАН, **58**, № 7 (1947). [3] С. А. Чунихин, ДАН, **59**, № 3 (1948). [4] С. А. Чунихин, ДАН, **60**, № 5 (1948). [5] С. А. Чунихин, ДАН, **66**, № 2 (1949). [6] С. А. Чунихин, ДАН, **69**, № 6 (1949). [7] С. А. Чунихин, Матем. сборн., **25** (67), № 3 (1949). [8] С. А. Чунихин, ДАН, **73**, № 1 (1950). [9] С. А. Чунихин, ДАН, **77**, № 6 (1951). [10] H. Zassenhaus, Lehrb. d. Gruppentheorie, **1**, 1937, S. 126, Satz 27.