

З. И. ХАЛИЛОВ

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 15 II 1952)

1. Рассматривается смешанная задача для уравнения вида

$$L_{P, P, \dots}(u) + M_{P, P, t, t}(u) + N_{\dots, t, t}(u) = 0, \quad (1)$$

где  $P$  — точка некоторой области  $D$ ,  $n$ -мерного пространства, имеющей границу  $S$ ;  $L$ ,  $M$ ,  $N$  — линейные дифференциальные операторы, где первая буква из каждой пары  $(P, P)$ ,  $(t, t)$  показывает, что коэффициенты оператора зависят от этой буквы, а вторая буква тех же пар показывает, что дифференцирование производится по указанной букве; если не имеет места какой-либо из указанных случаев, ставится точка.

Совокупность однородных граничных условий обозначим через

$$R(u)|_Q = 0, \quad Q \in S, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2)$$

Совокупность начальных условий обозначим через

$$A(u)|_{t=0} = f(P), \quad P \in \bar{D}. \quad (3)$$

Для решения задачи (1), (2), (3) предлагается следующий метод. Рассмотрим задачу о собственных значениях:

$$L_{P, P, \dots}(u) = \lambda u, \quad R(u)|_Q = 0. \quad (4)$$

Пусть задача (4) имеет дискретный спектр. Собственные значения и собственные функции обозначим через

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \quad (5)$$

$$u_1, u_2, \dots, \quad (6)$$

соответственно.

Решение задачи (1), (2), (3) ищется в виде ряда:

$$u(t, P) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) u_m(P). \quad (7)$$

Тогда искомая последовательность  $A_m(t)$  есть решение задачи Коши для бесконечной системы:

$$N_{\dots, t, t}(A_m) + \lambda_m A_m + \sum_{n=1}^{\infty} B_{nm}(t) A_n = 0, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

при начальных условиях, определяемых из (3) и (7), где

$$B_{mn}(t), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

коэффициенты разложения функции  $M_{P, P, t..}(u_m)$  по функциям (6)-

Таким образом, решение задачи (1), (2), (3) свелось к решению задачи Коши для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений\*.

2. Обоснование метода дадим для одного частного случая\*\*.

Рассмотрим смешанную задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - C(t, x)u, \quad (1')$$

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2')$$

$$u|_{t=0} = f(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad (3')$$

в прямоугольнике  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq \pi$ ;  $C(t, x)$  — непрерывная функция в указанном прямоугольнике\*\*\*.

Тогда (5) и (6) имеют значения:

$$\lambda_n = n, \quad (5')$$

$$u_n = \sin nx, \quad (6')$$

$n = 1, 2, \dots$ , а (9) имеет вид:

$$B_{mn}(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi C(t, \xi) \sin m\xi \sin n\xi d\xi. \quad (9')$$

Бесконечная система (8) имеет вид

$$\frac{dA_m}{dt} = -m^2 A_m - \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(t) A_n, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (8')$$

при начальных условиях

$$A_m|_{t=0} = a_m, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (10)$$

где  $a_m$  — коэффициенты разложения функции  $f(x)$  по функциям  $\sin mx$ .

Сделаем замену:

$$A_m(t) = \frac{1}{m^2} \int_0^t e^{-m^2(t-\tau)} \varphi_m(\tau) d\tau + a_m. \quad (11)$$

Для новых искомым функций  $\varphi_m(x)$  получаем бесконечную систему интегральных уравнений вида:

$$\varphi_m(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t K_{mn}(t, \tau) \varphi_n(\tau) d\tau + f_m(t), \quad m = 1, 2, \dots, \quad (12)$$

\* Идея рассматриваемого метода впервые автором изложена в (1) в связи с решением задачи о колебании плоских пластин, находящихся под действием переменных сжимающих сил.

\*\* Легко доказать единственность решения при  $C(t, x) \geq 0$ .

\*\*\* Отметим, что матрица  $(B_{mn})$  симметрична.

где

$$K_{mn}(t, \tau) = -\frac{m^2}{n^2} B_{mn}(t) e^{-n^2(t-\tau)}, \quad (13)$$

$$f_m(t) = -m^2 \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(t) a_n - m^4 a_m. \quad (14)$$

Легко установить теорему\*:

*Теорема. Если  $f_m(t)$ ,  $K_{mn}(t, \tau)$  непрерывны, последовательность  $(\max |f_m(x)|)$  входит в пространство  $l_1$ ,  $\max |K_{mn}(t, \tau)| \leq a_{mn}$ , где матрица  $(a_{mn})$  является ограниченной в пространстве  $l_1$ , то существует, притом единственное, решение системы (12)  $\varphi_m(t)$ , где  $(\max |\varphi_m(t)|) \in l_1$ .*

Если  $C(t, x)$  — непрерывная функция вместе с частными производными по  $x$  порядка  $\leq 2$ , производная третьего порядка удовлетворяет условию Дирихле и

$$\frac{\partial^j C(t, 0)}{\partial x^j} \equiv \frac{\partial^j C(t, \pi)}{\partial x^j} \equiv 0, \quad j = 0, 1, 2, 3,$$

то нетрудно доказать, что

$$|B_{mn}(t)| \leq A \frac{m^2}{n^2(m+n)^4} + B \frac{m^2}{n^2|m-n|^4}, \quad m \neq n, \quad (15)$$

$$|B_{mn}(t)| \leq A \frac{1}{m^4} + B,$$

$A, B$  — некоторые постоянные.

Далее предположим, что  $f(x)$  непрерывна вместе с производными порядка  $\leq 4$ , а  $f^{(5)}(x)$  удовлетворяет условию Дирихле и  $f^j(0) = f^j(\pi) = 0$ ,  $j = 0, 1, 2, 3, 4$ ; тогда

$$|a_m| \leq \frac{a}{m^6}, \quad (16)$$

где  $a$  — постоянная\*\*.

На основании равенств (15) и (16) выполняются все условия упомянутой выше теоремы.

Сначала докажем, что числовые матрицы  $\alpha_{mn}$  и  $\beta_{mn}$  ограничены в  $l_1$ , где

$$\alpha_{mn} = \frac{m^2}{n^2(m+n)^4}, \quad \beta_{mn} = \begin{cases} \frac{m^2}{n^2|m-n|^4}, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases}$$

В самом деле, пусть  $\vec{\xi} = (\xi_i)$  — произвольный вектор  $\in l_1$ . Тогда

$$\|(\alpha_{mn})\vec{\xi}\| \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| = \zeta(2) \|\vec{\xi}\|,$$

$$\begin{aligned} \|(\beta_{mn})\vec{\xi}\| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m+n)^2}{m^2} \cdot \frac{1}{n^4} + \zeta(4) + 1 \right] |\xi_m| \leq \\ &\leq [2\zeta(2) + \zeta(3) + \zeta(4) + 1] \|\vec{\xi}\|, \end{aligned}$$

откуда следует утверждение.

\* Доказывается методом последовательных приближений.

\*\* Условия, накладываемые на функции  $C(t, x)$  и  $f(x)$ , могут быть смягчены.

Покажем теперь, что  $f_m(t)$  из (14) имеет свойство:  $(\max |f_m(t)|) \in l_1$ .  
 На основании (16)  $(m^4 |a_m|) \in l_1$ ; далее

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left| \sum_{n=1}^{\infty} B_{mn}(t) a_n \right| \leq A \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^4} |a_n| +$$

$$+ B \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} (m+n)^2 \cdot \frac{1}{n^4} + \zeta(4) + 1 \right] |a_m| < +\infty.$$

На основании указанной выше теоремы существует решение системы (12)  $\varphi_m(t)$ , где  $(\max |\varphi_m(t)|) \in l_1$ . Тогда существует решение и системы (8)  $A_m(t)$ , которое на основании (11) обладает свойствами:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 \max |A_m(t)| < +\infty, \quad \sum_{m=1}^{\infty} \max \left| \frac{dA_m}{dt} \right| < +\infty.$$

На основании указанных свойств  $A_m(t)$

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) \sin mx \quad (17)$$

является решением задачи (1'), (2'), (3').

3. Принципиальная сторона метода заключается в том, что решение смешанной задачи для уравнения (1) получается в виде разложения по собственным функциям оператора  $L_{p,p}, \dots$ , при заданных граничных условиях (2).

Метод имеет значение в случае, когда нельзя применить метод разделения переменных.

При определенных условиях, как, например, при условиях рассмотренного частного случая, в системе (8) или ей эквивалентной системе интегральных уравнений применим метод редукции: решение (8) получается как предел решения сечения, представляющего совокупность конечного числа уравнений с конечным числом неизвестных:

$$\frac{dA_m^{(N)}}{dt} = -m^2 A_m^{(N)} - \sum_{n=1}^N B_{mn} A_n^{(N)}, \quad m = 1, 2, \dots, N.$$

Институт физики и математики  
 Академии наук Азерб.ССР

Поступило  
 14 II 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> З. И. Халилов, Изв. Азерб. филиала АН СССР, № 4, 7 (1942).