Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

ГИДРОМЕХАНИКА

Н. Н. ПОЛЯХОВ

ОБТЕКАНИЕ РЕШЕТОК ТЕЛЕСНЫХ ПРОФИЛЕЙ ЗАДАННОЙ ФОРМЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 II 1952)

В настоящей работе дается способ расчета решетки профилей заданной формы и выноса, одинаково применимый для любых густот q. В основе этого способа лежит конформное отображение решетки некоторых овалов с выносом $\pi/2$ на данную решетку. Для осуществления этого отображения необходимо предварительно знать отображение указанной решетки овалов на решетку пластин с выносом $\pi/2$, которая по способу Н. Е. Жуковского [1] отображается на решетку пластин с произвольным выносом. Все эти вспомогательные отображения легко выполняются и табулируются. Вследствие этого расчет решетки телесных профилей оказывается простым и мало отличается по форме от расчета изолированного профиля.

Известно, что в результате наложения поступательного потока, текущего параллельно действительной оси ξ_0 со скоростью, численно равной единице, на решетку диполей, расположенных на этой оси так, что их моменты обращены навстречу потоку, получается течение около решетки овалов с выносом $\pi/2$. Потенциал этого течения имеет вид:

$$F(\zeta_0) = \zeta_0 + \frac{t}{\pi}\sin^2\frac{\pi R}{t}\operatorname{ctg}\frac{\pi\zeta_0}{t},$$

где R — расстояние от диполя до критических точек.

Приняв функцию $F(\zeta_0)$ за отображенную функцию ζ, возможно на плоскости ζ получить решетки частного вида профилей с выносом $\pi/2$. В случае профилей произвольной формы отображающую функцию следует взять в виде:

$$\zeta = F(\zeta_0) + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + ib_n)\,|f|^n e^{in\vartheta},$$

где $|f|$ и ϑ суть модуль и аргумент $\operatorname{ctg}(\pi\zeta_0/t)$. При обходе вокруг диполя по какому-нибудь овалу величина ϑ будет изменяться от нуля до 2π.

Остановившись в плоскости ζ_0 на решетке овалов, для которых $|f|$ есть постоянная величина (называем эту решетку «вспомогательной» решеткой), получим:

$$\xi = \Phi_0(\rho, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\vartheta - b_n\sin n\vartheta) + a_0,$$

$$\eta = \Psi_0(\rho, \theta) + \sum_{n=1}^{\infty}(b_n\cos n\vartheta + a_n\sin n\vartheta) + b_0,$$

где ρ и θ — полярные координаты точек овала, а постоянная $|f|^n$ включена в a_n и b_n. В частности, для решетки пластин с выносом $\pi/2$ коэффициенты a_n и b_n представляют собой коэффициенты Фурье для функции $-\Psi_0$. Таким образом, для различных значений густоты $\bar{q}$ этой решетки можно раз и навсегда состазить таблицы или графики функции $\xi(\bar{q}, \vartheta)$, приняв длину пластинки за единицу. Н. Е. Жуковский (1) показал, что внешность решетки пластин шага t с выносом $\pi/2$ отображается на внешность пластин с произвольным выносом β и тем же шагом при помощи формулы:

$$-z_1^* = \frac{z_1}{t} = \frac{\cos\beta}{\pi} \ln\left(\cos\frac{\pi\bar{q}}{2}\zeta \pm \sqrt{\cos^2\frac{\pi\bar{q}}{2}\zeta - \cos^2\frac{\pi\bar{q}}{2}}\right) + \frac{1}{2}\bar{q}\zeta\sin\beta, \quad (1)$$

где ζ отнесено к половине длины пластинки и при переходе с верхней стороны пластинки на нижнюю знак перед корнем меняется на обратный. При η, равном нулю, и ξ, заключенном в пределах $(-1, +1)$, мнимая часть z_1 равна нулю. Это означает, что «первая» пластинка, на которой помещено начало координат системы ξ, η, перейдет в «первую» пластинку плоскости z_1. Для этой пластинки формула (1) примет вид:

$$-x_1^* = \frac{\cos\beta}{\pi} \ln\left(\cos\frac{\pi\bar{q}}{2}\xi \pm \sqrt{\cos^2\frac{\pi\bar{q}}{2}\xi - \cos^2\frac{\pi\bar{q}}{2}}\right) + \frac{\bar{q}\xi}{2}\sin\beta \equiv$$

$$\equiv \xi_1\cos\beta + \frac{\bar{q}\xi}{2}\sin\beta. \quad (2)$$

Так как ξ известно в зависимости от $\bar{q}$ и ϑ, то легко составить таблицы и графики для функции $\xi_1(\bar{q}, \vartheta)$ и на основании формулы (2) установить соотношение между точками пластинки z_1 и точками овала плоскости ζ_0.

Концам первой пластины плоскости z_1 соответствует некоторое значение ξ, равное ε, которое будет определяться из условия:

$$\left(\frac{dx_1}{d\xi}\right)_{\xi=\varepsilon} = \frac{\sin\frac{\pi\bar{q}}{2}\varepsilon}{\pm\sqrt{\sin^2\frac{\pi\bar{q}}{2} - \sin^2\frac{\pi\bar{q}}{2}\varepsilon}} - \operatorname{tg}\beta = 0,$$

откуда

$$\left|\sin\frac{\pi\bar{q}}{2}\varepsilon\right| = \sin\beta\sin\frac{\pi\bar{q}}{2}, \quad (3)$$

причем условие (3) будет выполняться в точках $(+\varepsilon, +0)$ и $(-\varepsilon, -0)$.

Густота новой решетки будет равна:

$$q_1 = x_1^*(-\varepsilon, -0) - x_1^*(\varepsilon, 0) =$$

$$= \frac{2\cos\beta}{\pi} \ln\frac{\sqrt{1 - \sin^2\beta\sin^2\frac{\pi\bar{q}}{2}} + \sin\frac{\pi\bar{q}}{2}\cos\beta}{\cos\frac{\pi\bar{q}}{2}} + \bar{q}\varepsilon\sin\beta. \quad (4)$$

По этой формуле легко построить графики для функции $\bar{q}(q_1, \beta)$. В случае решетки телесных профилей с шагом t и выносом β можно написать $z = z_1 + \Delta z$, где z_1 относится к решетке пластин, а Δz — искомая функция, которую в плоскости ζ_0 можно представить в виде ряда по степеням $|f| e^{i\vartheta}$, что в результате даст:

$$x^* = x_1^*(\bar{q}, \vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) + a_0,$$
$$y^* = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos n\vartheta + a_n \sin n\vartheta) + b_0, \tag{5}$$

где x_1^* определяется формулой (2), в которой ξ и ξ_1 — известные функции от $\bar{q}$ и ϑ. Для этих функций, как указывалось, легко составить таблицы.

Система уравнений (5) имеет тот же вид, который получается в задаче отображения изолированного профиля на круг. Если профиль тонкий и малоизогнутый, то за первое приближение для x^* можно взять $x_1^*(q_1, \vartheta)$. Это позволит найти $y_1^*[x(q_1, \vartheta)]$ и, следовательно, найти a_n, b_n и поправку $\Delta x^*(q_1, \vartheta)$ к величине x_1^*.

Таким образом, во втором приближении получим:

$$x_2^* = x_1^*(q_1, \vartheta) + \Delta x^*(q_1, \vartheta).$$

Эту зависимость при практическом расчете лучше всего представить графически, выбрав a_0 так, чтобы начало координат было в середине профиля. Густота решетки во втором приближении окажется равной

$$q_2 = q_1 + \Delta q_1.$$

Для получения в первом приближении решетки профилей с заданной густотой q можно взять решетку пластин с густотой q_1, равной $q - \Delta q_1$.

Таким образом, мы получим, что на решетку пластин с выносом $\pi/2$ и густотой $\bar{q}$ будет отображаться решетка профилей с густотой q и решетка пластин с густотой q_1, причем выносы этих решеток будут одинаковы и равны β. В случае сильно искривленных профилей нужно сначала взять решетку так называемых «теоретических» профилей, близких к заданным, и отобразить их на решетку пластин того же шага и выноса. Это всегда возможно сделать, ибо решетки теоретических профилей строятся обычно путем отображения их на решетку кругов, которую легко отобразить на решетку пластин. Таким образом возможно установить зависимость координат теоретического профиля от переменного $\xi(\vartheta)$, после чего основные формулы задачи будут иметь вид:

$$x = x_\text{т}(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\vartheta - b_n \sin n\vartheta) + a_0,$$
$$y = y_\text{т}(\vartheta) + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \sin n\vartheta + b_n \cos n\vartheta) + b_0, \tag{6}$$

где индексом Т отмечены координаты теоретического профиля.

Решение этой системы ничем не отличается от ее решения в случае тонкого профиля, для которого за первое приближение берется пластинка. Если конформное отображение заданной решетки на решетку пластин с выносом $\pi/2$, лежащую в плоскости ζ, известно, то построение потока около заданной решетки не представляет труда, так как поток около пластин известен.

Согласно Н. Е. Жуковскому [1], скорость на пластинках в плоскости ζ будет равна:

$$u(\xi) = u_\infty - \frac{v_\infty \sin\frac{\pi\bar{q}}{2}\xi + \frac{\Gamma}{2t}\cos\frac{\pi\bar{q}}{2}\xi}{\sqrt{\sin^2\frac{\pi\bar{q}}{2} - \sin^2\frac{\pi\bar{q}}{2}\xi}}.$$

На профилях решетки в плоскости z тогда получим:

$$|V(s)| = |u(\xi)|\frac{1}{\left|\frac{ds}{d\xi}\right|} = |u(\xi)|\cdot\left|\frac{d\xi/d\vartheta}{\frac{dx}{d\vartheta}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}\right|.$$

Производные, входящие в это выражение, могут быть найдены, так как x и ξ известны как функции ϑ. Так как, кроме того, в результате конформного отображения на пластинах нам будет известно местоположение точки, соответствующей заднему острому концу профиля, то определение циркуляции Γ, согласно постулату С. А. Чаплыгина, не представляет труда.

Так как производные от $\operatorname{ctg}(\pi\zeta_0/t)$ в бесконечности перед и за решеткой овалов равны нулю, то

$$\left(\frac{d\zeta}{d\zeta_0}\right)_{\zeta_0=\pm i\infty} = 1; \quad \left(\frac{dz}{d\zeta_0}\right)_{\zeta_0=\pm\infty} = \left(\frac{dz_1}{d\zeta}\right)_{\zeta=\pm i\infty} = e^{i\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right)},$$

и, следовательно,

$$V'_\infty(z) = V_\infty(\zeta)\, e^{i(\beta+\pi/2)}. \tag{7}$$

Таким образом, при переходе от плоскости ζ_0 к плоскости z величина вектора скорости на бесконечном удалении от оси решетки остается неизменной, направление же этого вектора меняется, а именно, он поворачивается на угол $\beta+\pi/2$. Это тот самый угол, который составляет ось решетки профилей с осью решетки овалов в результате отображения.

Из формулы (7) следует, что

$$u_\infty = v'_\infty\cos\beta - u'_\infty\sin\beta,$$

$$v_\infty = -(u'_\infty\cos\beta + v'_\infty\sin\beta),$$

где u'_∞ и v'_∞ — проекции скорости невозмущенного потока плоскости z на оси x, y. Нетрудно убедиться, что система (6) эквивалентна следующему интегральному уравнению:

$$x = x_т - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(y - y_т)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\varphi}{2}\,d\varphi + a_0.$$

В случае, когда теоретический профиль близок к заданному, влияние интеграла мало, и его не нужно вычислять с большой точностью. Вследствие этого при малых густотах, когда вспомогательные овалы близки к окружностям, можно вычислять ϑ на этих окружностях.

Во время окончания этой работы вышла из печати работа С. В. Валландера [2], посвященная той же задаче, но решаемой иным способом.

Поступило
15 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Е. Жуковский, Вихревая теория гребного винта, статья 3-я, Избр. соч., **2**, 1948. [2] С. В. Валландер, ДАН, **82**, № 3, 345 (1952).