Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Г. Ц. ТУМАРКИН

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ГРАНИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 9 II 1952)

Пусть в области G, ограниченной жордановой спрямляемой кривой γ, дана последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$, $(f_n(z) = u_n(z) + iv_n(z))$, имеющих почти всюду на γ угловые граничные значения $f_n(\zeta)$. $(f_n(\zeta) = u_n(\zeta) + iv_n(\zeta)$ есть предел $f_n(z)$ по любому некасательному к γ пути.) Предположим, что последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится внутри области G.

Тогда, как это нетрудно видеть, выполнение одного из условий а) или а′):

а) последовательность $\{u_n(\zeta)\}$ действительных частей граничных значений функций $f_n(z)$ сходится по мере на множестве e точек γ, $m(e) > 0$;

а′) последовательность $\{|f_n(\zeta)|\}$ модулей граничных значений функций $f_n(z)$ сходится по мере на множестве e точек γ, $m(e) > 0$, еще недостаточно для того, чтобы утверждать сходимость по мере на множестве e последовательности $\{f_n(\zeta)\}$.

Действительно, рассмотрим в круге $|z| < 1$ последовательность $\{z^n\}$. Последовательность $\{z^n\}$ внутри круга $|z| < 1$ равномерно сходится к 0. Граничные значения этих функций имеют почти всюду на окружности $|z| = 1$ постоянный модуль $(|e^{in\theta}| = 1)$, так что условие а′) для этой последовательности выполняется, но ни на каком множестве e, $m(e) > 0$, окружности $|z| = 1$ последовательность $\{e^{in\theta}\}$ не сходится по мере.

Точно так же, опираясь на теорему Рунге, можно построить последовательность многочленов $\{p_n(z)\}$, равномерно сходящуюся в круге $|z| < 1$ и такую, что последовательность $\{u_n(e^{i\theta})\}$ действительных частей $p_n(e^{i\theta})$ сходится по мере на окружности $|z| = 1$, в то время как последовательность $\{p_n(e^{i\theta})\}$ не сходится по мере ни на каком множестве e, $m(e) > 0$, точек окружности $|z| = 1$.

В этой работе указываются некоторые классы последовательностей аналитических функций, для которых выполнение одного из условий а) или а′) и равномерная сходимость последовательности этих функций внутри области G являются условиями необходимыми и достаточными для сходимости по мере на множестве e последовательности $\{f_n(\zeta)\}$.

Теорема 1. *Пусть в круге $|z| < 1$ дана последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$ $(f_n(z) = u_n(z) + iv_n(z))$, удовлетворяющих условию: функции $u_n(re^{i\varphi})$, $n = 1, 2, \ldots$, представимы в круге $|z| < 1$ интегралом Пуассона*

$$u_n(re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)} u_n(e^{i\theta})\, d\theta, \tag{1}$$

причем последовательность функций $\left\{ \int_0^x u_n(e^{i\theta})\, d\theta \right\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *есть последовательность функций равностепенно абсолютно непрерывных.*

Тогда для сходимости по мере на множестве E, $m(E) > 0$, *последовательности* $\{f_n(e^{i\theta})\}$ *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *последовательность* $\{u_n(e^{i\theta})\}$ *сходилась по мере на множестве* E;

б) *последовательность* $\{f_n(z)\}$ *равномерно сходилась внутри круга* $|z| < 1$.

Замечание 1. При выполнении условий теоремы 1 последовательность $\{f_n(e^{i\theta})\}$ будет сходиться в среднем в любой степени p, $0 < p < 1$, на множестве E к $f(e^{i\theta})$ — граничным значениям $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Замечание 2. Условие (1), накладываемое в теореме 1 на функции $u_n(re^{i\varphi})$, эквивалентно следующему: семейство функций $\left\{ \int_0^x u_n(re^{i\varphi})\, d\varphi \right\}$, $0 < r < 1$, $n = 1, 2, \ldots$, равностепенно абсолютно непрерывно (равностепенная абсолютная непрерывность понимается по r и по n).

С помощью теоремы 1 можно доказать следующие теоремы:

Теорема 2. *Пусть в области* G, *ограниченной жордановой спрямляемой кривой* γ, *дана последовательность аналитических функций* $\{f_n(z)\}$ $(f_n(z) = u_n(z) + iv_n(z))$, *причем существует непрерывная внутри области* G *функция* $g(z)$, $g(z) \geqslant 0$, *имеющая почти всюду на* γ *угловые граничные значения* $g(\zeta)$, *такая, что*

$$|u_n(z)| \leqslant g(z), \quad z \in G, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

Тогда для сходимости по мере на множестве e, $m(e) > 0$, *последовательности* $\{f_n(\zeta)\}$ *необходимо и достаточно, чтобы:*

а) *последовательность* $\{u_n(\zeta)\}$ *сходилась по мере на множестве* e;

б) *последовательность* $\{f_n(z)\}$ *равномерно сходилась внутри области* G.

При этом последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ *будет сходиться к* $f(\zeta)$ — *граничным значениям* $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Теорема 3. *Пусть в области* G, *ограниченной спрямляемой кривой* γ, *дана последовательность аналитических функций* $\{f_n(z)\}$, *имеющих почти всюду на* γ *граничные значения* $f_n(\zeta)$, *и существуют две непрерывные внутри области* G *функции* $g_1(z)$ *и* $g_2(z)$ $(g_1(z) \geqslant 0$, $g_2(z) \geqslant 0)$, *имеющие почти всюду на* γ *угловые граничные значения* $g_1(\zeta)$ *и* $g_2(z)$, *причем* $g_1(\zeta) \neq 0$ *почти всюду на* γ, *такие, что*

$$\underset{z \in G}{g_1(z) \leqslant |f_n(z)| \leqslant g_2(z)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

Тогда для сходимости по мере на множестве e, $m(e) > 0$, *последовательности* $f_n(\zeta)$ *необходимо и достаточно, чтобы:*

а′) *последовательность* $\{|f_n(\zeta)|\}$ *сходилась по мере на множестве* e;

б) *последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходилась внутри области G.*

При этом последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ будет сходиться по мере к $f(\zeta)$ — граничным значениям $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Замечание 1. Условиям теоремы 3 будет удовлетворять, например, последовательность функций $\{f_n(z)\}$, для которых существуют две аналитические в области G функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$ $(F_1(z) \not\equiv 0)$ такие, что

$$|F_1(z)| \leqslant |f_n(z)| \leqslant F_2(z), \quad z \in G, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Замечание 2. Как показывает рассмотренный выше пример последовательности $\{z^n\}$ в круге $|z| < 1$, в условиях теоремы 3 нельзя отбросить требование $g_1(\zeta) \neq 0$ почти всюду на γ.

Теоремы 4 и 4′ легко выводятся из теоремы 3.

Теорема 4. *Пусть в области G, ограниченной спрямляемой кривой γ, дана последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$, удовлетворяющая условию*

$$|f_n(z)| \leqslant |f_{n+1}(z)|, \quad z \in G, \quad n = 1, 2, \ldots; \tag{4}$$

$f_n(z)$ имеют почти всюду на γ угловые граничные значения $f_n(\zeta)$.

Тогда, если существует

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z_0) = a, \quad z_0 \in G, \quad 0 < |a| < \infty, \tag{5}$$

то последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится в области G $(\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z))$, и последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ сходится по мере на γ к $f(\zeta)$ — граничным значениям $f(z)$.

Замечание 1. Если вместо (5) известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0) = \infty$, и существует множество e, $m(e) > 0$, на котором $\lim\limits_{n\to\infty} |f_n(\zeta)| < \infty$, то последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ не сходится по мере на e.

Замечание 2. Точно так же в теореме 4 нельзя отбросить требование, чтобы $a \neq 0$. Действительно, рассмотрим последовательность $\{e^{i\alpha_n} z\}$ в круге $|z| < 1$, где $\{e^{i\alpha_n}\}$ не сходится. Условие (4) выполняется. В точке $z = 0$ $f_n(0) = 0$, но на окружности $|z| = 1$ последовательность граничных значений этих функций не будет сходиться по мере.

Теорема 4′. *Пусть в области G, ограниченной спрямляемой кривой γ, дана последовательность аналитических функций $\{f_n(z)\}$, удовлетворяющих условию*

$$|f_n(z)| \geqslant |f_{n+1}(z)|, \quad z \in G, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

и имеющих почти всюду на γ угловые граничные значения.

Тогда, если существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z_0) \neq 0$, то $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится в области G и последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ сходится по мере на γ к $f(\zeta)$ — граничным значениям $f(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(z)$.

Замечание 1. В теоремах 4 и 4′ достаточно требовать, чтобы лишь функция $f_1(z)$ имела граничные значения, так как тогда из (4) или (6) сразу вытекает, что и все функции $f_n(z)$, $n = 2, 3, \ldots$, имеют почти всюду на γ угловые граничные значения.

Замечание 2. Если последовательность $\{f_n(z)\}$, удовлетворяющая условию (6), равномерно сходится к 0 внутри G и если на множестве e, $m(e) > 0$, последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ сходится по мере, то пределом по мере будет 0. В этом случае может не существовать множества e, $m(e)>0$, на котором последовательность $\{f_n(\zeta)\}$ сходится по мере. Пример: последовательность $\{z^n\}$ в круге $|z|<1$.

Из приведенных выше теорем вытекает предложение, дополняющее известную теорему Гарнака о невозрастающих или неубывающих последовательностях гармонических функций. Как известно, теорема Гарнака утверждает, что если в области G дана неубывающая или невозрастающая последовательность гармонических функций $\{u_n(z)\}$:

$$u_1(z) \leqslant u_2(z) \leqslant \ldots \leqslant u_n(z) \leqslant \ldots, \quad z \in G,$$

или

$$u_1(z) \geqslant u_2(z) \geqslant \ldots \geqslant u_n(z) \geqslant \ldots,$$

причем последовательность $\{u_n(z_0)\}$ сходится $(z_0 \in G)$, то последовательность $\{u_n(z)\}$ равномерно сходится внутри области G $(\lim\limits_{n\to\infty} u_n(z) = u(z))$.

Предположим теперь, что область G ограничена спрямляемой кривой γ и функция $u_1(z)$ имеет почти всюду на γ угловые граничные значения $u_1(\zeta)$. Обозначим через $v_n(z)$ гармоническую функцию, сопряженную с $u_n(z)$ $(v_n(z_0)=0,\ n=1, 2, \ldots)$, и через $v(z)$ — гармоническую функцию, сопряженную с $u(z)$ $(v(z_0)=0)$. Тогда нетрудно видеть, что и все функции $u_n(z)$, $v_n(z)$, $u(z)$, $v(z)$ имеют почти всюду на γ угловые граничные значения и последовательности $\{u_n(\zeta)\}$ и $\{v_n(\zeta)\}$ сходятся по мере на γ соответственно к $u(\zeta)$ и $v(\zeta)$.

Замечание. Если последовательность $\{u_n(z_0)\}$ расходится и если на множестве e, $m(e)>0$, $\lim\limits_{n\to\infty} |u_n(\zeta)| \neq \infty$, то на этом множестве последовательность $\{v_n(\zeta)\}$ не сходится по мере.

Владимирский государственный
педагогический институт
им. П. И. Лебедева-Полянского

Поступило
6 VI 1951