Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

*МАТЕМАТИКА*

З. И. ХАЛИЛОВ

# ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

*(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 III 1952)*

В настоящей работе исследуется задача Коши для бесконечной системы вида:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_j}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + f_i(t, \overline{x}) \tag{1}$$

при начальных условиях

$$u_i\big|_{t=t_0} = \varphi_i(\overline{x}), \quad i = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

В системе (1) $\sum\limits_{(k_s)}$ означает суммирование по всем целым $k_s \geqslant 0$, сумма которых не превосходит некоторого числа $M$; $\overline{x}$ — вектор с компонентами $x_1, x_2, \ldots, x_n$; $A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}$, $f_i$, $\varphi_i$, $u_i$ — комплексные функции их действительных аргументов в бесконечной полосе:

$$\Pi \left\{ \begin{array}{c} 0 \leqslant t \leqslant T \\ -\infty < x_s < +\infty \end{array} \right\}. \tag{3}$$

Для конечной системы вида (1) задача Коши исследована И. Г. Петровским ([2]).

Под классом $K_\varkappa$ понимается множество последовательностей $\{(\psi_i)\}$ функций, определенных в $\Pi$, ограниченных и непрерывных вместе с производными порядка $\leqslant \varkappa$ и удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 [\psi_i]_\varkappa < +\infty, \tag{4}$$

где

$$C_i[\psi_i]_\varkappa = \sup|\psi_i| + \sup\left|\frac{\partial \psi_i}{\partial t}\right| + \\ + \sum_{(k_s)}^{\varkappa} \sup \left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} \psi_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right|; \tag{5}$$

под sup понимается $\sup\limits_{t, \overline{x} \in \Pi}$.

Будем предполагать, что в системе (1) последовательность $(f_i)$ взята из некоторого класса $K_\varkappa$ *.

В настоящей работе под решением (1) в П понимается последовательность $u(u_1, u_2, \ldots)$ из класса $K_M$, удовлетворяющая системе (1).

Введем обозначение

$$\Pi \left\{ \begin{array}{c} t_0 \leqslant t \leqslant T \\ -\infty < x_s < +\infty \end{array} \right\}.$$

Понятие корректности постановки задачи Коши для системы (1) обобщается следующим образом.

Задача Коши для системы (1) **поставлена равномерно корректно** на отрезке $[0, T]$, если выполняются следующие условия:

1°. Для всякой последовательности $(\varphi_i)$ из класса $K_\varkappa$ и всякого $t_0 \in [0, T]$ всегда существует одно и только одно решение системы (1) в $\Pi_0$, обращающееся в последовательность $(\varphi_i)$ при $t = t_0$.

2°. Для каждого $t_0 \in [0, T]$ и любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ можно указать такое, не зависящее от $t_0$, число $\eta > 0$, что когда расстояние между последовательностями $(\varphi_i)$ и $(\varphi_i')$ меньше, чем $\eta$:

$$\rho\,[(\varphi_i), (\varphi_i')]_\varkappa = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 [\varphi_i - \varphi_i']_\varkappa} < \eta, \tag{6}$$

то расстояние между соответствующими решениями меньше, чем $\varepsilon$:

$$\rho\,[(u_i), (u_i')]_M = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} C_i^2 [u_i - u_i']_M} < \varepsilon. \tag{7}$$

В дальнейшем мы пользуемся теорией бесконечных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений.

В данной работе $A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)$ считаем непрерывными функциями на отрезке $[0, T]$, причем бесконечную матрицу $(A_{ij}(t))$, где

$$A_{ij}(t) = \sum_{(k_s)} \left| A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t) \right|, \tag{8}$$

считаем **мажорируемой**: существует ограниченная регулярная матрица $(a_{ij})$, элементы которой неотрицательные числа и такая, что**

$$A_{ij}(t) \leqslant a_{ij}. \tag{9}$$

Матрицу $A$ мы будем называть регулярной, если при произвольном $\bar{a} \in l_2$ вектор $A\bar{a} \in l_2$ ***.

При условии (9) систему (1) будем называть **регулярной**. В дальнейшем систему (1) всегда будем предполагать регулярной.

Следуя И. Г. Петровскому, введем условие А для системы (1).

---

* Число $\varkappa$ уточняется ниже.

** Это условие можно заменить более слабым.

*** $l_2$ означает пространство Гильберта.

Рассмотрим однородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dv_i^{(l)}}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)\,(i\alpha_1)^{k_1} \cdots (i\alpha_n)^{k_n} v_j^{(l)} \tag{10}$$

с начальными условиями

$$v_i^{(l)}\big|_{t=t_0} = \begin{cases} 0, & i \neq l, \\ 1, & i = l, \end{cases} \tag{11}$$

при $0 \leqslant t_0 < T$, где $\alpha_s$, $s = 1, 2, \ldots, n$, — вещественные параметры, $-\infty < \alpha_s < +\infty$; $v_i^{(l)} \equiv v_i^{(l)}(t, t_0, \alpha)$.

Нетрудно убедиться, что на основании теории бесконечных систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений $v_i^{(l)}$ всегда существуют, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |v_i^{(l)}|^2 < +\infty$ при любом $l$.

*Если равномерно относительно* $t_0$

$$|v_i^{(l)}| \leqslant C_{il}(1 + \alpha_m)^p, \tag{12}$$

*где* $\alpha_m = \max\{|\alpha_s|\}$, $\alpha_m \to \infty$; $C_{il}$, $p$ — *некоторые положительные числа причем бесконечная матрица* $(C_{il})$ *ограниченная регулярная, то будем говорить, что для системы* (1) *имеет место условие* А.

Лемма 1. *Наряду с* (10), (11) *рассмотрим задачу*

$$\frac{dv_i^*}{dt} = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(k_s)} A_{ij}^{(k_1, \ldots, k_n)}(t)\,(i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} v_j^* + F_i(t, \overline{\alpha}), \tag{13}$$

$$v_i^*\big|_{t=t_0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots,$$

*где*

$$|F_i(t, \overline{\alpha})| \leqslant C_i(1 + \alpha_m)^{p_1}, \quad (C_i) \in l_2.$$

*Тогда*

$$|v_i^*(t, \overline{\alpha})| \leqslant C_i^*(1 + \alpha_m)^{p+p_1},$$

*где* $(C_i^*) \in l_2$.

Доказательство леммы выполняется на основании формулы:

$$v_i^*(t, \overline{\alpha}) = \int_{t_0}^{t} \sum_{l=1}^{\infty} v_i^{(l)}(t, \tau, \overline{\alpha})\, F_l(\tau, \overline{\alpha})\, d\tau. \tag{14}$$

Лемма 2. *При условиях леммы* 1, *если*

$$\left| \frac{\partial^{k_1 + \ldots + k_n} F_i}{\partial \alpha_1^{k_1} \ldots \partial \alpha_n^{k_n}} \right| \leqslant C_i(1 + \alpha_m)^{p_1}, \quad (C_i) \in l_2,$$

*где* $\Sigma k_s \leqslant k$ *и* $p_1$ — *любое как положительное, так и отрицательное число, то*

$$\left| \frac{\partial v_i^{* k_1 + \ldots + k_n}}{\partial \alpha_1^{k_1} \ldots \partial \alpha_n^{k_n}} \right| \leqslant C_i^*(1 + \alpha_m)^{p + p_1 + \Sigma k_s(M - 1 + p)}, \tag{15}$$

*где* $(C_i^*) \in l_2$.

Наряду с леммами 1, 2, пользуясь леммами 3, 4 И. Г. Петровского [2], доказываются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если последовательности* $(f_i)$ *и* $(\varphi_l)$ — *из класса* $K_{M+2n+p}$ *и равны нулю вне куба* $Q_a$ $(|x_s| \leqslant a)$, *то задача Коши* (1), (2) *имеет решение при наличии условия* A, *причем решение определяется формулой*:

$$u_i(t, \bar{x}) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \sum_{l=1}^{\infty} E_{\varphi_l}(\bar{\alpha})\, v_i^{(l)}(t, \bar{\alpha})\, e^{i\bar{\alpha}\bar{x}} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n +$$

$$+ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} v_i^*(t, \bar{\alpha})\, e^{i\bar{\alpha}\bar{x}} d\alpha_1 \ldots d\alpha_n, \tag{16}$$

где $E_{\varphi_l}(\bar{\alpha}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi_l(\bar{x})\, e^{-i\bar{\alpha}\bar{x}} dx_1 \ldots dx_n$, $\bar{\alpha}\bar{x} = \sum\limits_{s=1}^{n} \alpha_s x_s$; $(v_i^*(t, \bar{\alpha}))$ — *решение задачи Коши*:

$$\frac{dv_i^*}{dt} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{(k_s)} A_{ij}(t)^{(k_1, \ldots, k_n)} (i\alpha_1)^{k_1} \ldots (i\alpha_n)^{k_n} v_j^* + E_{f_i}, \quad v_i^*\big|_{t=t_0} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1, *если* $(f_i)$ *и* $(\varphi_l)$ *из класса* $K_{(2n+1)(M+p)}$, *то*

$$\left| \frac{\partial^{k_1+\ldots+k_n} u_i}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} \right| \leqslant \frac{C_i}{[1 + |x_1|]^2 \ldots [1 + |x_n|]^2},$$

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial t} \right| \leqslant \frac{C_i^*}{[1 + |x_1|]^2 \ldots [1 + |x_n|]^2}, \tag{17}$$

где $(C_i) \in l_2$, $(C_i^*) \in l_2$.

Пользуясь способом И. Г. Петровского, на основании теоремы 2 доказывается теорема 3.

Теорема 3. *Если* $(f_i)$ *и* $(\varphi_i)$ — *произвольные последовательности из класса* $K_{(2n+1)(M+p)}$, *то решение задачи Коши* (1), (2) *существует при наличии условия* A, *и оно определяется формулой* (16).

Теорема 4. *При условиях теоремы* 3 *решение системы* (1) *непрерывно зависит от начальных данных* (2), *где расстояние определяется в смысле* 2°.

Теорема 5. *При условии* A, *если задача* (1), (2) *имеет решение, то оно единственно.*

Из теорем 3, 4, 5 следует:

Теорема 6. *При условиях теоремы* 3, *если имеет место условие* A *для системы* (1), *то задача Коши для системы* (1) *поставлена равномерно корректно.*

Институт физики и математики
Академии наук Азерб.ССР

Поступило
24 VII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд и А. М. Яглом, ЖЭТФ, 18 (1948). [2] И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ, А, 1, 7 (1938).