Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

О НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 II 1952)

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная периодическая функция, $E_n(f)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — ее наилучшие приближения посредством тригонометрических полиномов порядка $n-1$ и

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_x \left| \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x+ih) \right|$$

ее модуль непрерывности k-го порядка.

В моей работе ([1]) доказана теорема («основная теорема»), частным случаем которой является следующее предложение:

А. *Пусть k — натуральное число и $0 < \alpha < k$. Для того чтобы*

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \, * \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_k(\delta, f) \sim \delta^\alpha \quad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Возникает естественный вопрос, нельзя ли указать эквивалент условия (1) в классических терминах модулей непрерывности функции $f(x)$ и ее производных **. Отвечая на этот вопрос, я доказываю здесь такую теорему:

Теорема. *Пусть $\alpha > 0$, k и r — целые числа, причем $0 \leqslant r < \alpha$, $k + r > \alpha$. Для того чтобы*

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha - r} \quad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Полагая в этой теореме $r = 0$, мы вновь получаем утверждение А. Далее, если α не целое, то, полагая $r = [\alpha]$, $k = 1$, получаем, что (1) эквивалентно условию

$$\omega(\delta, f^{([\alpha])}) \sim \delta^{\alpha - [\alpha]},$$

---

* Запись $A(t) \sim B(t)$ означает, что функции $A(t)$ и $B(t)$ имеют одинаковый порядок, т. е. что существуют положительные константы C_1 и C_2, для которых выполняются неравенства $C_1 B(t) \leqslant A(t) \leqslant C_2 B(t)$.

** Эта задача была поставлена предо мною в 1948 г. С. Н. Бернштейном и В. В. Степановым.

а если α — целое, то полагая $r=\alpha-1$, $k=2$, получаем, что (1) эквивалентно условию

$$\omega_2(\delta, f^{(\alpha-1)}) \sim \delta.$$

Заметим также, что из нашей теоремы вытекает эквивалентность условий

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha-r} \quad (0<\delta\leqslant 1)$$

для всех k и r, удовлетворяющих неравенствам $0\leqslant r<\alpha$, $k+r>\alpha$.

2. При доказательстве сформулированной теоремы мы будем пользоваться следующими известными результатами ([1]):

B. *Пусть k — натуральное число, r — целое неотрицательное и функция $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$. Тогда*

$$E_n(f) \leqslant C_3(k, r)\, n^{-r}\omega_k(n^{-1}, f^{(r)}) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

C. *Пусть k — натуральное число. Тогда*

$$\omega_k(n^{-1}, f) \leqslant C_4(k)\, n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}E_\nu(f) \quad (n=1, 2, \ldots).$$

D. *Пусть k и r — натуральные числа и сходится ряд $\Sigma n^{r-1}E_n(f)$. Тогда функция $f(x)$ имеет непрерывную r-ю производную $f^{(r)}(x)$ и*

$$\omega_k(n^{-1}, f^{(r)}) \leqslant C_5(k, r)\left\{n^{-k}\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k+r-1}E_\nu(f) + \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\nu^{r-1}E_\nu(f)\right\} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Кроме этих предложений, нам понадобятся две леммы тауберова характера, относящиеся к числовым рядам с монотонными членами.

Лемма 1. *Пусть $0<\beta<k$, $u_n\downarrow 0$* и*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_\nu \sim n^{\beta} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$u_n \sim n^{\beta-k} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Лемма 2. *Пусть $r>0$, $\gamma>0$, $v_n\downarrow 0$ и*

$$\sum_{\nu=n}^{\infty}\nu^{r-1}v_\nu \sim n^{-\gamma} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Тогда

$$v_n \sim n^{-\gamma-r} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Доказательства этих лемм весьма просты. Например, если $k\geqslant 1$ и

$$0<C_6 n^{\beta} \leqslant \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_\nu \leqslant C_7 n^{\beta},$$

то

$$\sum_{\nu=m+1}^{n}\nu^{k-1}u_\nu = \sum_{\nu=1}^{n}\nu^{k-1}u_\nu - \sum_{\nu=1}^{m}\nu^{k-1}u_\nu \geqslant C_6 n^{\beta} - C_7 m^{\beta},$$

---

* Запись $u_n\downarrow 0$ означает, что $u_1\geqslant u_2\geqslant\ldots\geqslant u_n\geqslant\ldots$ и $u_n\to 0$ при $n\to\infty$.

откуда в силу монотонности последовательности $\{u_n\}$

$$u_m \geqslant \{C_6 n^\beta - C_7 m^\beta\} \left\{ \sum_{\nu=m+1}^{n} \nu^{k-1} \right\}^{-1} \geqslant k \frac{C_6 n^\beta - C_7 m^\beta}{n^k - m^k}.$$

Полагая здесь

$$n = \left[\left(\frac{2C_7}{C_6} \right)^{1/\beta} m \right] + 1 \leqslant C_8 m,$$

получаем, что

$$u_m \geqslant k C_7 m^\beta (C_8^k - 1)^{-1} m^{-k} = C_9 m^{\beta - k} > 0.$$

Аналогично устанавливаются и остальные утверждения лемм.

3. Переходим к доказательству теоремы. Пусть сперва $r=0$, $k>\alpha$ и $E_n(f) \sim n^{-\alpha}$. Тогда из теоремы B вытекает, что

$$\omega_k(n^{-1}, f) \geqslant C_{10}(k, r)\, n^{-\alpha},$$

а из теоремы C, что

$$\omega_k(n^{-1}, f) \leqslant C_{11}(k, r, \alpha)\, n^{-\alpha}.$$

Таким образом,

$$\omega_k(n^{-1}, f) \sim n^{-\alpha}$$

и, в силу монотонности функции $\omega_k(\delta, f)$,

$$\omega_k(\delta, f) \sim \delta^\alpha \quad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Пусть, далее, $0 < r < \alpha$, $k + r > \alpha$ и $E_n(f) \sim n^{-\alpha}$. Тогда, рассуждая аналогично предыдущему, выводим из теорем B и D, что

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha - r} \quad (0 < \delta \leqslant 1).$$

Итак, условие $E_n(f) \sim n^{-\alpha}$ влечет выполнение условий

$$\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha - r} \quad (0 < \delta \leqslant 1)$$

для $0 \leqslant r < \alpha$, $k + r > \alpha$.

Пусть теперь $r = 0$, $k > \alpha$ и $\omega_k(\delta, f) \sim \delta^\alpha$. Тогда, в силу теоремы B,

$$E_n(f) \leqslant C_{12}(k)\, n^{-\alpha},$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f) \leqslant C_{12}(k) \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-\alpha-1} < C_{13}(k, \alpha)\, n^{k-\alpha},$$

а в силу теоремы C

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f) \geqslant C_{14}(k)\, n^{k-\alpha}.$$

Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} E_\nu(f) \sim n^{k-\alpha}.$$

Положив в лемме 1 $\beta = k - \alpha$, $u_n = E_n(f)$, получаем отсюда, что

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть, наконец, $0<r<\alpha,\ k+r>\alpha$ и $\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha-r}$. Как и выше, выводим из теоремы B неравенства

$$E_n(f) \leqslant C_{15}(k, r)\, n^{-\alpha} \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Для оценки $E_n(f)$ снизу введем обозначение

$$A_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f).$$

С одной стороны, в силу (2),

$$A_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \leqslant C_{15}(k, r) \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{r-\alpha-1} \leqslant C_{16}(k, r, \alpha)\, n^{r-\alpha},$$

откуда

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} A_\nu \leqslant C_{16}(k, r, \alpha) \sum_{\nu=n}^{n} \nu^{k+r-\alpha-1} \leqslant C_{17}(k, r, \alpha)\, n^{k+r-\alpha}. \tag{3}$$

С другой стороны, в силу D,

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} A_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \sum_{p=\nu}^{\infty} p^{r-1} E_p(f) =$$

$$= \sum_{p=1}^{n} p^{r-1} \sum_{\nu=1}^{p} \nu^{k-1} E_p(f) + \sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1} E_p(f) \geqslant$$

$$\geqslant C_{18}(k, r) \left\{ \sum_{p=1}^{n} p^{k+r-1} E_p(f) + n^k \sum_{p=n+1}^{\infty} p^{r-1} E_p(f) \right\} \geqslant$$

$$\geqslant C_{19}(k, r)\, n^k n^{r-\alpha} = C_{19}(k, r)\, n^{k+r-\alpha}, \tag{4}$$

где $C_{19}>0$. Из соотношений (3) и (4) вытекает, что

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^{k-1} A_\nu \sim n^{k+r-\alpha}.$$

Полагая в лемме 1 $\beta = k+r-\alpha$, $u_n = A_n$, получаем, что

$$A_n = \sum_{\nu=n}^{\infty} \nu^{r-1} E_\nu(f) \sim n^{r-\alpha}. \tag{5}$$

Наконец, полагая в лемме 2 $\gamma = \alpha - r$, $v_n = E_n(f)$, выводим из (5) соотношение

$$E_n(f) \sim n^{-\alpha} \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Итак, любое из условий $\omega_k(\delta, f^{(r)}) \sim \delta^{\alpha-r}$ $(0<\delta\leqslant 1)$, где $0 \leqslant r < \alpha$, $k+r>\alpha$, влечет $E_n(f) \sim n^{-\alpha}$ $(n=1, 2, \ldots)$. Теорема доказана.

В заключение заметим, что результаты настоящей работы без изменения формулировок и доказательств переносятся на приближения в метрике L^p $(p \geqslant 1)$.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
7 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Стечкин, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, 219 (1951).