

Н. Ф. СЕСЕКИН

К ТЕОРИИ ЛОКАЛЬНО НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП БЕЗ КРУЧЕНИЯ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 14 III 1952)

Из работы А. И. Мальцева ((<sup>1</sup>), теорема б) следует, что группа без кручения, покрываемая нильпотентными нормальными делителями, все абелевы подгруппы которой конечного ранга, сама имеет конечный ранг. Однако в этом случае достаточно наличия хотя бы одной максимальной абелевой подгруппы конечного ранга, чтобы такая группа имела конечный ранг. Доказательству этого результата и прилегающих к нему предложений посвящена настоящая заметка.

1°. Определение 1. (<sup>6</sup>). Пусть  $H$  — подгруппа группы  $G$ . Ряд подгрупп

$$1 = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_\alpha \subset \dots \subset H_\gamma = H \quad (1)$$

группы  $H$  назовем возрастающим центральным рядом (возр. ц. р.) подгруппы  $H$  относительно  $G$ , если для предельного  $\alpha$   $H_\alpha = \bigcup_{\beta < \alpha} H_\beta$  и для неопределенного  $\alpha$   $[G, H_\alpha] \subseteq H_{\alpha-1}$  \*. Возр. ц. р. подгруппы  $H$  относительно  $G$  назовем верхним (верхн. ц. р.), если  $H_{\alpha+1}$  есть совокупность всех элементов  $h_{\alpha+1}$  из  $H$ , для которых  $[G, h_{\alpha+1}] \subseteq H_\alpha$ . В этом случае подгруппы  $H_\alpha$  назовем гиперцентрами подгруппы  $H$  относительно  $G$ .

Из работы (<sup>6</sup>) следует:

Лемма 1. Если ряд (1) есть верхн. ц. р. подгруппы  $H$  относительно группы  $G$ , то  $H_\alpha = H \cap Z_\alpha(G)$ , где  $Z_\alpha(G)$  — гиперцентр группы  $G$  с номером  $\alpha$ .

Обозначим через  $I(H)$  изолятор подгруппы  $H$  в группе  $G$ , т. е. пересечение всех изолированных в  $G$  подгрупп, содержащих  $H$ . Через  $\mathfrak{z}(H)$  будем обозначать централизатор подгруппы  $H$ .

Так как гиперцентр  $Z_\alpha(G)$   $R$ -группы  $G$  изолирован в  $G$  (см. (<sup>2</sup>), стр. 98), то из леммы 1 и предложения (с) работы (<sup>3</sup>) (стр. 289) имеем:

Лемма 2. Если подгруппа  $H$  из  $R$ -группы  $G$  обладает возр. ц. р. относительно  $G$ , то гиперцентры  $H_\alpha$  подгруппы  $H$  относительно  $G$  изолированы в  $H$ .

Лемма 3. Если  $H$  — подгруппа  $R$ -группы  $G$ , то  $\mathfrak{z}(H) = \mathfrak{z}(I(H))$ .

Доказательство \*\*. Так как  $H \subseteq I(H)$ , то  $\mathfrak{z}(H) \supseteq \mathfrak{z}(I(H))$ . Но  $\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(H))$  изолирована в  $G$  ((<sup>2</sup>), стр. 84) и содержит  $H$ , следовательно,  $I(H) \subseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(H))$ . Отсюда  $\mathfrak{z}(I(H)) \supseteq \mathfrak{z}(\mathfrak{z}(\mathfrak{z}(H))) = \mathfrak{z}(H)$ .

\* Под  $[A, B]$ , где  $A$  и  $B$  — подмножества группы  $G$ , следует понимать подгруппу из  $G$ , порожденную коммутаторами вида  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ , где  $a \in A, b \in B$ .

\*\* Это доказательство предложено П. Г. Конторовичем, доказательство автора сложнее.

Лемма 4. Если  $N_i (i = 1, 2, \dots, k)$  — нормальные делители группы  $G$ , а фактор-группы  $G/N_i$  абелевы без кручения конечного ранга  $r_i$ , то фактор-группа  $G/\bigcap_{i=1}^k N_i$  абелева без кручения конечного ранга  $r \leq r_1 + r_2 + \dots + r_k$ .

Определение 2<sup>(5)</sup>. Группа  $G$  имеет конечный ранг  $r = r(G)$ , если она обладает нормальным рядом конечной длины  $r$ , факторы которого локально циклические без кручения.

Лемма 5. Если подгруппа  $H$  из  $R$ -группы  $G$  обладает возр. ц. р.  $1 = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_k \subset H_{k+1} \subset \dots \subset H_r = H$  относительно  $G$ , факторы которого с натуральными номерами локально циклические без кручения, то для нормального ряда  $G = N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq N_{k+1} \supseteq \dots$  группы  $G$ , составленного из централизаторов  $N_k = \mathfrak{z}(H_k)$  подгрупп  $H_k$ ,  $1 \leq k < \omega$ , имеет место соотношение  $r(N_k/N_{k+1}) \leq k$ .

Следствие. В условиях леммы 5 имеет место соотношение  $r(G/N_k) \leq \frac{v(v-1)}{2}$ .

Отсюда и леммы 2 имеем:

Теорема 1. Если подгруппа  $H$  конечного ранга  $r$  из  $R$ -группы  $G$  обладает возр. ц. р. относительно  $G$ , то

$$r(G/\mathfrak{z}(H)) \leq \frac{r(r-1)}{2}.$$

2°. Лемма 6. Множество изолированных подгрупп абелевой группы без кручения конечного ранга разве лишь счетно.

Лемма 7. Если локально нильпотентная группа  $G$  без кручения обладает максимальной абелевой подгруппой  $A$  конечного ранга, то  $G$  обладает отличным от единицы центром.

Лемма 8. Абелев нормальный делитель  $A$  конечного ранга  $r$  локально нильпотентной группы  $G$  без кручения обладает возр. ц. р. относительно  $G$ .

Отсюда и из теоремы 1 следует:

Теорема 2. Нормальный делитель  $N$  конечного ранга  $r$  локально нильпотентной группы  $G$  обладает возр. ц. р. относительно  $G$ , а фактор-группа  $G/\mathfrak{z}(N)$  группы  $G$  по централизатору подгруппы  $N$  имеет конечный ранг, не превосходящий числа  $\frac{r(r-1)}{2}$ .

Определение 3. Группа  $G$  называется метабелевой, если коммутант  $G'$  группы  $G$  содержится в ее центре.

Лемма 9. Если в метабелевой группе  $G$  без кручения имеется максимальная абелева подгруппа  $A$  конечного ранга  $n+k$ , где  $n$  есть ранг изолированной подгруппы  $Z$  центра группы  $G$ , содержащей коммутант  $G'$ , то ранг  $G/Z$  не превосходит  $k(n+1)$ .

Доказательство. Очевидно,  $Z \subset A$ . Пусть  $z_1, z_2, \dots, z_n$  — базис подгруппы  $Z$ , а  $z_1, \dots, z_n, a_1, \dots, a_k$  — базис подгруппы  $A$ . Отобразим группу  $G$  формулой:  $G \ni x \rightarrow [a_i, x] \in Z$  в подгруппу  $Z$ . Это отображение, как нетрудно видеть, является гомоморфизмом группы  $G$  на некоторую подгруппу  $A_i$  из  $Z$ , ядром которого будет централизатор  $N_i = \mathfrak{z}(a_i)$  элемента  $a_i$ . В силу изоморфизма  $G/N_i \simeq A_i$  имеем  $r(G/N_i) \leq n$ . Так как  $A$  — максимальная абелева подгруппа, то  $A = \bigcap_{i=1}^k N_i$ . Но тогда, по лемме 6,  $r(G/A) \leq kn$ , и  $r(G/Z) \leq kn + k = k(n+1)$ .

Отсюда и из леммы 7 следует важная лемма:

Лемма 10. Локально нильпотентная группа  $G$  без кручения, имеющая максимальную абелеву подгруппу  $A_1$  конечного ранга, обла-

дает рядом гиперцентров:  $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset Z_2 \subset \dots \subset Z_{i-1} \subset Z_i \subset \dots$ , факторы которого конечного ранга, и нормальным рядом  $1 = A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_{i-1} \subset A_i \subset \dots$ , где  $Z_{i-1} \subset A_{i-1}$ ;  $A_i/Z_{i-1}$  есть максимальная абелева подгруппа из  $G/Z_{i-1}$ , содержащая  $A_{i-1}/Z_{i-1}$ , причем  $n_i + k_i \leq k_{i-1}(n_{i-1} + 1)$ , где  $n_i$  и  $k_i$  — ранги фактор-групп  $Z_i/Z_{i-1}$  и  $A_i/Z_i$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) соответственно.

**Теорема 3.** *Нильпотентная группа без кручения тогда и только тогда имеет конечный ранг, когда она обладает по крайней мере одной максимальной абелевой подгруппой конечного ранга.*

**Теорема 4.** *Если хотя бы одна максимальная абелева подгруппа локально нильпотентной группы  $G$  без кручения имеет конечный ранг и содержится в некотором нильпотентном нормальном делителе, то сама группа  $G$  нильпотентна и имеет конечный ранг.*

Говорят, что группа  $G$  покрывается нильпотентными нормальными делителями, если каждый ее элемент содержится в некотором собственном нильпотентном нормальном делителе. Будем такие группы называть  $N$ -группами. Примером  $N$ -группы без центра может служить группа бесконечных треугольных матриц с рациональными коэффициентами и единицей по главной диагонали.

**Теорема 5.** *Для того чтобы группа без кручения была нильпотентной конечного ранга, необходимо и достаточно, чтобы она покрывалась нильпотентными нормальными делителями и обладала по крайней мере одной максимальной абелевой подгруппой конечного ранга.*

Так как  $N$ -группа обладает отличными от единицы абелевыми нормальными делителями, то в связи с теоремой 5 представляет интерес следующий результат:

**Теорема 6.** *Если среди максимальных абелевых нормальных делителей  $N$ -группы  $G$  без кручения имеется хотя бы один конечного ранга  $r$ , то  $G$  — нильпотентная группа конечного ранга  $\leq \frac{r(r+1)}{2}$ .*

Доказательство теоремы 6 опирается на теорему 2 и следующие предложения:

**Лемма 11.** *Если в произвольной группе кручения имеется хотя бы одна максимальная абелева характеристическая (или инвариантная) подгруппа конечного ранга  $r$ , то ранг любой ее максимальной абелевой характеристической (соответственно, инвариантной) подгруппы конечен и не превосходит числа  $\frac{r(r+1)}{2}$ .*

**Следствие.** Если в группе без кручения имеется хотя бы один максимальный абелев нормальный двигатель конечного ранга  $r$ , то класс любого ее нильпотентного нормального делителя не превосходит числа  $r(r+1)$ .

Теоремы 5 и 6 являются усилением результата теоремы 6 А. И. Мальцева ((<sup>1</sup>), стр. 580) для групп без кручения.

**3°. Лемма 12.** *Если в произвольной группе имеются три нормальных делителя  $C_1 \subset C_2 \subset C_3$  таких, что фактор-группа  $C_{i+1}/C_i$  есть центр  $G/C_i$ , где  $i = 1, 2$ , и такой нормальный делитель  $N$ , что  $N \cap (C_3 \setminus C_2)$  не пусто, то  $N \cap (C_2 \setminus C_1)$  также не пусто.*

**Лемма 13.** *Если  $R$ -группа  $G$  имеет ряд гиперцентров*

$$1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_n \subset \dots \subset Z_\omega, \quad (*)$$

*а  $N$  — такой ее нормальный делитель, что  $G/N$  имеет конечный ранг, то для любого  $n$  пересечение  $N \cap (Z_n \setminus Z_{n-1})$  не пусто.*

Лемма 14. Если  $R$ -группа  $G$  имеет ряд гиперцентров (\*), факторы которого конечного ранга, то пересечение  $\mathfrak{z}(Z_\omega) \cap Z_\omega$  имеет бесконечный ранг.

Из лемм 10, 14 и 11 следует теорема:

Теорема 7. Если локально нильпотентная группа  $G$  без кручения, обладающая максимальной абелевой подгруппой конечного ранга, имеет максимальную абелеву характеристическую (инвариантную) подгруппу конечного ранга, то группа  $G$  нильпотентна и имеет конечный ранг.

Для случая групп без элементов конечного порядка это предложение уточняет результат А. И. Мальцева (<sup>(1)</sup>, стр. 579).

Так как периодическая локально нильпотентная группа, обладающая конечной максимальной абелевой подгруппой, специальна в смысле С. Н. Черникова (<sup>(4)</sup>), т. е. обладает абелевым нормальным делителем конечного индекса\*, то возникает вопрос: не обладает ли локально нильпотентная группа без кручения, имеющая максимальную абелеву подгруппу конечного ранга, таким абелевым нормальным делителем, фактор-группа по которому имеет конечный ранг?

Однако можно построить группу класса  $\omega 2 + 1$ , имеющую максимальную абелеву подгруппу ранга 3, но не обладающую предполагаемым свойством. Если же локально нильпотентная группа  $G$  без кручения обладает максимальной абелевой подгруппой ранга 2, то, опираясь на лемму 10 и теорему 1, можно показать, что  $G$  суть группы класса  $\nu + 1$ , где  $1 \leq \nu \leq \omega$ , с минимальными рангами верхн. ц. р.

Структура группы при этом определяется следующими теоремами.

Теорема 8. Для того чтобы нильпотентная группа  $G$  без кручения обладала максимальной абелевой подгруппой ранга 2, необходимо и достаточно, чтобы: а)  $G$  имела минимальные ранги верхн. ц. р.  $1 = Z_0 \subset Z_1 \subset \dots \subset Z_{n-1} \subset Z_n = G$ ; б)  $G$  обладала такой последовательностью элементов  $1 = a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ ;  $x$ , что  $a_i \in Z_i \setminus Z_{i-1}$  и  $[x, a_i] = a_{i-1}$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ).

Теорема 9. Для того чтобы не нильпотентная локально нильпотентная группа без кручения  $G$  обладала максимальной абелевой подгруппой ранга 2, необходимо и достаточно, чтобы  $G$  обладала верхн. ц. р. длины  $\omega + 1$  с локально циклическими факторами.

При этом группа  $G$  совпадает с изолатором подгруппы, порожденной элементами  $1 = a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ ;  $x$  с определяющими соотношениями  $a_i a_j = a_j a_i$ ;  $[x, a_n] = a_{n-1}^{m_{n-1}}$ , где  $m_{n-1}$  — целые числа,  $i, j, n = 1, 2, \dots$ .

Уральский государственный университет  
им. А. М. Горького

Поступило  
21 XI 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> А. И. Мальцев, Матем. сборн., 28 (70):3 (1951). <sup>2</sup> П. Г. Конторович, там же, 22 (64):1 (1948). <sup>3</sup> П. Г. Конторович, там же, 19 (61):2 (1946). <sup>4</sup> С. Н. Черников, там же, 6 (48):2 (1936). <sup>5</sup> С. Н. Черников, ДАН, 70, № 6 (1950). <sup>6</sup> R. Ваг, Trans. Am. Math. Soc., 58, No. 3, 295 (1945).

\* Этот результат сообщил мне С. Н. Черников.