Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

В. А. РОХЛИН

НОВЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ТЕОРИИ ЧЕТЫРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 III 1952)

Известно, что всякая ориентированная замкнутая поверхность способна служить границей ориентированного трехмерного многообразия. В моей заметке [1] показано, что всякое ориентированное замкнутое трехмерное многообразие способно служить границей ориентированного четырехмерного многообразия. Для четырехмерных многообразий аналогичная теорема неверна; например, комплексная проективная плоскость неспособна ограничивать. В настоящей заметке дается гомологическое условие, необходимое и достаточное для того, чтобы ориентированное замкнутое четырехмерное многообразие способно было служить границей ориентированного пятимерного многообразия. Оказывается, что всякое ориентированное замкнутое четырехмерное многообразие получает способность ограничивать, если добавить к нему некоторое число надлежащим образом ориентированных комплексных проективных плоскостей. На основе этой теоремы удается выразить понтрягинское характеристическое число четырехмерного многообразия [2, 3] через гомологические инварианты многообразия. Соответствующие результаты получаются и для неориентируемых многообразий. Кроме того в заметке, на основе ее результатов, исправляется ошибка, содержащаяся в моих заметках [4, 5], посвященных вычислению $(n+3)$-мерной гомотопической группы n-мерной сферы.

1. Определения. Под многообразием мы понимаем гладкое компактное многообразие — замкнутое или с краем. Каждому ориентированному многообразию M^k отвечает противоположно ориентированное многообразие $-M^k$ и каждым двум ориентированным многообразиям M^k и N^k отвечают их сумма M^k+N^k (составленная из непересекающихся многообразий M^k и N^k) и их разность $M^k-N^k=M^k+(-N^k)$. Условимся говорить, что ориентированное многообразие M^k ограничивает или гомологично нулю и писать $M^k\sim 0$, если существует сохраняющий ориентацию гладкий гомеоморфизм между M^k и краем некоторого ориентированного многообразия M^{k+1}. Далее, условимся говорить, что ориентированные замкнутые многообразия M^k и N^k гомологичны между собой, и писать $M^k\sim N^k$, если $M^k-N^k\sim 0$. В силу этих определений ориентированные замкнутые k-мерные многообразия распадаются на непересекающиеся гомологические классы, и эти классы образуют аддитивную группу — k-мерную гомологическую группу, которую мы обозначим через $\mathfrak{O}^k$. Из элементарных соображений следует, что группы $\mathfrak{O}^1$ и $\mathfrak{O}^2$ тривиальны, а из результатов моей заметки [1], что и группа $\mathfrak{O}^3$ тривиальна.

Группа $\mathfrak{O}^4$ не тривиальна и даже содержит бесконечную циклическую подгруппу. Действительно, пусть P^4 — естественно ориентированная комплексная проективная плоскость, s — целое число и sP^4 — многообразие, составленное из s (непересекающихся между собой) экземпляров многообразия P^4, если $s \geqslant 0$, и из $-s$ экземпляров многообразия $-P^4$, если $s < 0$. Понтрягинское характеристическое число многообразия sP^4 равно $3s$ (см. ([3]), § 3, Е), а для всякого многообразия, гомологичного нулю, оно равно нулю (см. ([2]), теорема 3). Таким образом, все многообразия sP^4 попарно негомологичны между собой.

Пусть M^4 — произвольное ориентированное замкнутое четырехмерное многообразие. Обозначим через B приведенную двумерную группу Бетти многообразия M^4 и через (x, y), где $x \in B$, $y \in B$, — индекс пересечения гомологических классов x, y. Индекс (x, x) представляет собой целочисленную квадратичную форму с дискриминантом ± 1, определенную на решетке B. Сигнатуру этой формы мы будем называть сигнатурой многообразия M^4 и обозначать через $\sigma(M^4)$. Очевидно, $\sigma(-M^4) = -\sigma(M^4)$.

2. Основные результаты. *Ориентированное замкнутое четырехмерное многообразие M^4 ограничивает в том и только в том случае, если его сигнатура $\sigma = \sigma(M^4)$ равна нулю. В общем случае многообразие M^4 гомологично многообразию σP^4. Таким образом, четырехмерная гомологическая группа $\mathfrak{O}^4$ есть свободная циклическая группа, образующей которой служит гомологический класс комплексной проективной плоскости P^4. Понтрягинское характеристическое число X_{22} многообразия M^4 равно его утроенной сигнатуре:*

$$X_{22}(M^4) = 3\sigma(M^4).$$

Эти теоремы непосредственно вытекают из следующих пяти лемм: a) для всякого M^4 существует такое s, что $M^4 \sim sP^4$; b) если $M^4 \sim N^4$, то $\sigma(M^4) = \sigma(N^4)$; c) $\sigma(sP^4) = s$; d) если $M^4 \sim N^4$, то $X_{22}(M^4) = X_{22}(N^4)$; e) $X_{22}(sP^4) = 3s$.

Предложения d) и e) принадлежат Понтрягину и уже цитировались выше. Лемма b) доказывается на основе классических теорем двойственности; лемма c) очевидна. Основную трудность представляет доказательство леммы a). Оно протекает следующим образом. Нетрудно показать, что для заданного многообразия M^4 существует гомологичное ему связное многообразие M_1^4, обладающее тривиальной фундаментальной группой и вложимое в семимерное евклидово пространство R^7. В R^7 на M_1^4 всегда можно построить нормальное векторное поле, особые точки которого изолированы и обладают индексами ± 1. Вырезав окрестности этих точек и заклеив надлежащим образом каждое из возникших шаровых отверстий комплексной проективной плоскостью с таким же отверстием, мы превратим M_1^4 в новое многообразие $M_2^4 \subset R^7$, на котором существует нормальное векторное поле без особенностей. Очевидно, $M^4 \sim M_2^4 + mP^4$, где m — некоторое целое число. Пусть L^7 — дополнение правильной окрестности многообразия M_2^4 в сфере S^7, которая получается из R^7 присоединением несобственной точки, и U^5 — образующая относительной целочисленной пятимерной Δ-группы многообразия L^7, выбранная в согласии с ориентацией многообразия M_2^4. Оказывается, что среди относительных циклов класса U^5 можно найти многообразие, и притом такое, граница которого гомологична в смысле п°1 многообразию $M_2^4 - nP^4$, где n — некоторое целое число. Таким образом, $M_2^4 \sim nP^4$, и $M^4 \sim M_2^4 + mP^4 \sim (m+n)P^4$.

Замечание. Наши сведения о гомологических группах $\mathfrak{O}^k$ старших размерностей ограничиваются в основном тем, что мы знаем о характеристических числах и вычетах Понтрягина ([2], [3]). Так как при сложении многообразий характеристические числа и вычеты складываются, а для многообразий, гомологичных нулю, они равны нулю (см. [2], теорема 3), то каждое характеристическое число размерности k определяет гомоморфизм группы $\mathfrak{O}^k$ в группу целых чисел, а каждый характеристический вычет — в группу вычетов mod 2. Если не считать эйлеровой характеристики (которую здесь следует рассматривать как вычет) и найденного в настоящей работе четырехмерного характеристического числа X_{22}, то все эти инварианты не вычислены. Характеристические числа имеются только у многообразий, размерность которых делится на 4 (см. [2], § 6, D). Интересно отметить, что и определение сигнатуры, данное выше для четырехмерных многообразий, естественно обобщается на многообразия, размерность которых делится на 4 (под B следует понимать $\frac{k}{2}$-мерную приведенную группу Бетти многообразия M^k), и что *сигнатура такого многообразия равна нулю, если оно ограничивает.*

3. Неориентируемый случай. Отбросим теперь ориентации и будем рассматривать как ориентируемые, так и неориентируемые замкнутые k-мерные многообразия. Если многообразие M^k гладко гомеоморфно краю некоторого (ориентируемого или неориентируемого) многообразия M^{k+1}, то мы говорим, что M^k гомологично нулю mod 2, и пишем $M^k \sim 0 \pmod 2$. Каждым двум многообразиям M^k и N^k отвечает их сумма $M^k + N^k$, и если эта сумма гомологична нулю mod 2, то мы говорим, что M^k и N^k гомологичны между собой mod 2, и пишем $M^k \sim N^k \pmod 2$. Гомологические (mod 2) классы замкнутых k-мерных многообразий образуют аддитивную группу — k-мерную гомологическую группу mod 2, которую мы обозначим через $\mathfrak{N}^k$. Все ненулевые элементы группы $\mathfrak{N}^k$ имеют, очевидно, порядок 2. Из элементарных соображений следует, что группа $\mathfrak{N}^1$ тривиальна, а группа $\mathfrak{N}^2$ состоит из двух элементов (ее образующей служит класс действительной проективной плоскости P^2: если эйлерова характеристика многообразия M^2 четна, то $M^2 \sim 0 \pmod 2$, если она нечетна, то $M^2 \sim P^2 \pmod 2$). Из результатов моей заметки [1] следует, что группа $\mathfrak{N}^3$ тривиальна. Оказывается, что *группа $\mathfrak{N}^4$ состоит из двух элементов и что ее образующей служит класс комплексной проективной плоскости P^4. Замкнутое многообразие M^4 в том и только в том случае гомологично нулю* mod 2, *если его эйлерова характеристика четна; если она нечетна, то $M^4 \sim P^4 \pmod 2$.*

4. $(n+3)$-мерная гомотопическая группа n-мерной сферы. Вычислению этой группы посвящены мои заметки „Об одном отображении $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную" [4] и „Классификация отображений $(n+3)$-мерной сферы в n-мерную" [5]. В них содержится ошибка, исказившая окончательные результаты. Здесь она будет исправлена.

Мы будем пользоваться обозначениями $\pi_r(S^n)$, $\mathring{\pi}_r(S^n)$, f_n $(n \geqslant 3)$ и g_n $(n \geqslant 4)$ заметки [5] и обозначением h_n $(n \geqslant 2)$ заметки [4]. В заметке [4] ошибочно утверждается, что $h_n = 0$, если $n \geqslant 3$. В действительности *класс h_n не является нулевым ни при каком значении n.* Доказательство основывается на результатах настоящей работы. Именно, методами работы [4] можно показать, что равенство $h_n = 0$ $(n \geqslant 3)$ эквивалентно существованию ориентируемого замкнутого многообразия Q^4 со следующими двумя свойствами (ср. [4], п° 4): a) в Q^4 имеется гладкий тор T^2, который, во-первых, обладает окрестностью E^4, распадающейся в прямое произведение тора T^2 на двумерный элемент, и, во-вторых, служит двумерным характеристическим циклом многообразия Q^4 и остается характеристическим циклом, если вырезать E^4 из Q^4 и приклеить снова любым другим (гладким) способом; b) $X_{22}(Q^4) = 0$. В силу результатов настоящей работы свойство b) эквивалентно тому, что многообразие Q^4 ограничивает, а это, как можно показать, противоречит свойству а). Ошибка в заметке ([4]) сделана в п°4, в том месте, где появляется сфера Σ^2; в действительности сферы Σ^2 с указанными там свойствами не существует. Эта ошибка повторена в заметке ([5]) (п°3, абзац 3), где ее следствием является ошибочное равенство $12\,g_n = 0$. В действительности конструкция, описанная в п°4 заметки ([5]), приводит к равенству $12\,g_n = h_n\,(\neq 0)$. Так как $2h_n = 0$, то $24\,g_n = 0$. Равенство $\pi_{n+3}(S^n) = \pi^{\circ}_{n+3}(S^n)$, доказываемое в п°3 заметки ([5]), остается в силе (в его доказательстве вместо неявно используемого равенства $h_n = 0$ должно быть применено равенство $h_n = 12\,g_n$). Таким образом, образующие групп $\pi_{n+3}(S^n)$ $(n \geqslant 3)$ указаны в заметке ([5]) правильно но порядки этих образующих вдвое уменьшены: в действительности, $\pi_6(S^3)$ *есть циклическая группа порядка* 12 *с образующей* f_3, $\pi_7(S^4)$ *есть прямая сумма своей циклической подгруппы порядка* 12 *с образующей* f_4 *и свободной циклической подгруппы с образующей* g_4, $\pi_{n+3}(S^n)$ *при* $n \geqslant 5$ *есть циклическая группа порядка* 24 *с образующей* g^n *.

5. Соотношение между характеристическими циклами. Порядок элемента g_n был вычислен нами как половина наименьшего из положительных значений, которые может принимать характеристическое число X_{22} ориентированного четырехмерного многообразия M^4 при условии, что двумерный характеристический класс $z^2(M^4)$ этого многообразия является нулевым (ср. ([5]), п° 4). Так как указанное наименьшее значение числа X_{22} равно 48, то $X_{22}(M^4) \equiv 0 \pmod{48}$ *и* $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$ *для всякого многообразия* M^4, *у которого* $z^2(M^4) = 0$ (ср. ([5]), п°5).

Эта теорема имеет следующее интересное применение. Уайтхедом ([7]) и Понтрягиным ([8]) было доказано, что гомотопический тип связного замкнутого многообразия M^4 с тривиальной фундаментальной группой определяется арифметическим типом квадратичной формы (x, x) (см. п°1). Однако вопрос о существовании многообразия с формой (x, x) заданного арифметического типа (который предполагается, конечно, целочисленным и обладающим дискриминантом ± 1) остался открытым. Мы можем дать на этот вопрос отрицательный ответ. Формой (x, x) не может, например, служить принимающая только четные значения положительно определенная форма ранга 8 с дискриминантом 1 (такая форма была построена А. Н. Коркиным и Е. И. Золотаревым ([9])). Действительно, если форма (x, x) многообразия M^4 с тривиальной фундаментальной группой принимает только четные значения, то $z^2(M^4) = 0$ ([10]), а тогда $\sigma(M^4) \equiv 0 \pmod{16}$, и потому $\sigma(M^4) \neq 8$.

Поступило
14 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Рохлин, ДАН, **81**, 355 (1951). [2] Л. С. Понтрягин, Матем. сборн., **21**, 233 (1947). [3] Л. С. Понтрягин, там же, **24**, 129 (1949). [4] В. А. Рохлин, ДАН, **80**, 541 (1951). [5] В. А. Рохлин, ДАН, **81**, 19 (1951). [6] W. S. Massey and G. W. Whitehead, Bull. Am. Math. Soc., **57**, 491 (1951). [7] J. H. C. Whitehead, Comment. Math. Helv., **22**, 48 (1949). [8] Л. С. Понтрягин, Усп. матем. наук, **4**, в. 4, 157 (1949). [9] А. Н. Коркин и Е. И. Золотарев, Math. Ann., **6**, 366 (1873). [10] Wu Wen-tsün, C. R., 230, **508** (1950).

---

* В ноябрьском номере Bull. of the Amer. Math. Soc. за 1951 г. появилось сообщение В. Массея и Г. Уайтхеда ([6]), в котором также утверждается, что $h_n \neq 0$ $(n \geqslant 3)$ и что порядки групп $\pi_6(S^3)$ и $\pi_{n+3}(S^n)$ с $n \geqslant 5$ равны, соответственно, 12 и 24 (структура групп $\pi_{n+3}(S^n)$ этими авторами не определена). Из сообщения видно, что эти результаты получены методами, совершенно отличными от моих.