Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Н. М. КОРОБОВ и А. Г. ПОСТНИКОВ

НЕКОТОРЫЕ ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О РАВНОМЕРНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ДОЛЕЙ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 11 III 1952)

В настоящей работе доказывается, что при известных условиях из равномерности распределения дробных долей последовательности следует равномерность распределения некоторых ее подпоследовательностей.

Теорема 1. *Если для любого целого $h>0$ функция $\Delta_h F(x) = F(x+h) - F(x)$ равномерно распределена, то для каждой пары целых λ и μ функция $F(\lambda x+\mu)$ также равномерно распределена.*

Доказательство. Для $\lambda = 1$ утверждение теоремы совпадает с критерием равномерного распределения, доказанным Ван дер Корпутом [4].

Пусть $\lambda > 1$. Обозначим через S сумму

$$S = \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(\lambda x+\mu)} \qquad (m \neq 0, \text{ целое}).$$

Пользуясь тем, что

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{y=1}^{\lambda} e^{2\pi i \frac{xy}{\lambda}} = \begin{cases} 1, & \text{если } x \equiv 0 \pmod{\lambda}, \\ 0, & \text{если } x \not\equiv 0 \pmod{\lambda}, \end{cases}$$

запишем сумму S в виде

$$S = \frac{1}{\lambda}\sum_{y=1}^{\lambda}\sum_{x=1}^{\lambda P} e^{2\pi i m\left[F(x+\mu)+\frac{xy}{m\lambda}\right]}.$$

Отсюда получаем очевидную оценку:

$$|S| \leqslant \max_{1\leqslant y\leqslant\lambda}\left|\sum_{x=1}^{\lambda P} e^{2\pi i m\left[F(x+\mu)+\frac{xy}{m\lambda}\right]}\right|. \tag{1}$$

Рассмотрим функцию $F_1(x) = F(x+\mu) + \frac{xy}{m\lambda}$. В силу условий теоремы функция $\underset{h}{\Delta} F_1(x) = \underset{h}{\Delta} F(x+\mu) + \frac{hy}{m\lambda}$ распределена равномерно при любом целом положительном h. Пользуясь упомянутым выше критерием Ван дер Корпута, получим, что функция $F_1(x)$ также равномерно распределена. Но тогда из (1) следует, что $|S| = o(P)$, чем утверждение теоремы доказано.

Приведем некоторые следствия. Пусть $q, q_1, \ldots, q_n$ — положительные целые, отличные от единицы, и $m_1, \ldots, m_n$ — произвольные целые, не равные одновременно нулю.

Следствие 1. *Если величины $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ выбраны так, что система функций $\alpha_1 q_1^x, \ldots, \alpha_n q_n^x$ равномерно распределена в n-мерном пространстве, то при любом целом $\lambda > 0$ система функций $\alpha_1 q_1^{\lambda x}, \ldots, \alpha_n q_n^{\lambda x}$ также равномерно распределена в n-мерном пространстве.*

Действительно, из выбора величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ в силу многомерного критерия равномерного распределения следует, что функция $F(x) = m_1 \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_n \alpha_n q_n^x$ равномерно распределена. Конечная разность этой функции $\Delta_h F(x) = m_1 (q_1^h - 1) \alpha_1 q_1^x + \ldots + m_n (q_n^h - 1) \alpha_n q_n^x$ при любом целом $h > 0$ также равномерно распределена, так как представляет собой функцию того же вида, что и $F(x)$. Отсюда, согласно теореме 1, получим, что при любом целом $\lambda > 0$ будет равномерно распределена функция $F(\lambda x) = m_1 \alpha_1 q_1^{\lambda x} + \ldots + m_n \alpha_n q_n^{\lambda x}$, и, следовательно, система функций $\alpha_1 q_1^{\lambda x}, \ldots, \alpha_n q_n^{\lambda x}$ будет равномерно распределена в n-мерном пространстве.

Следствие 2. *Пусть α выбрано так, что для всякого целочисленного отличного от константы полинома $f(x)$ функция $\alpha q^x f(x)$ равномерно распределена. Тогда для каждого такого полинома при любом выборе целых λ и μ функция $\alpha q^{\lambda x + \mu} f(\lambda x + \mu)$ также равномерно распределена.*

Доказательство. Положим $F(x) = \alpha q^x f(x)$. Для всякого целого $h > 0$ будет

$$\Delta_h F(x) = \alpha q^x \left[q^h f(x+h) - f(x)\right].$$

Полином $q^h f(x+h) - f(x)$ отличен от константы одновременно с $f(x)$, следовательно, в силу выбора α, функция $\underset{h}{\Delta} F(x)$ равномерно распределена. Но тогда, по теореме 1, функция $F(\lambda x + \mu) = \alpha q^{\lambda x + \mu} f(\lambda x + \mu)$ равномерно распределена при любых целых λ и μ $(\lambda > 0)$.

Если выбрать α так, чтобы при любых целочисленных полиномах $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, каждая линейная комбинация которых $m_1 f_1(x) + \ldots + m_n f_n(x)$ отлична от константы, система функций $\alpha q^x f_1(x), \ldots, \alpha q^x f_n(x)$ была равномерно распределена в n-мерном пространстве, то получим аналогично, что система функций $\alpha q^{\lambda x + \mu} f_1(\lambda x + \mu), \ldots, \alpha q^{\lambda x + \mu} f_n(\lambda x + \mu)$ также равномерно распределена в n-мерном пространстве.

Доказательство существования величин $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и их построение производится на основании соображений, указанных в работе [2].

Примечание. В частном случае при $n = 1$ из следствия 1 получаем, что равномерность распределения функции $\alpha_1 q_1^x$ влечет за собой равномерность распределения функции $\alpha_1 q_1^{\lambda x}$ при любом целом $\lambda > 0$. Это утверждение было доказано ранее И. И. Шапиро-Пятецким [1] с помощью сравнительно сложных теоретико-функциональных соображений.

Теорема 2. *Пусть N и P — целые, $1 < N < P$; $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция, для которой $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) = \infty$; $\psi(x)$ — функция, обратная функции $x\varphi(x)$.*

Если для всех целых h из интервала $1 \leqslant h \leqslant N$ выполняется оценка

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{\frac{2\pi i m\Delta F(x)}{h}}\right| < c_0\varphi(N)P^{1-\rho} \quad (0<\rho<1,\ c_0=c_0(m)),$$

то для любой пары целых λ и μ ($\lambda>0$, $|\mu|<\lambda$) будет

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F(\lambda x+\mu)}\right| < c\lambda\frac{P}{\sqrt{\psi(P^\rho)}}. \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим, как в теореме 1,

$$S=\sum_{x=1}^{P} e^{\frac{2\pi i m\Delta F(\lambda x+\mu)}{h}}, \qquad F_1(x)=F(x+\mu)+\frac{xy}{\lambda m}.$$

В силу оценки (1) на интервале $1\leqslant y\leqslant\lambda$ найдется целое y, при котором будет выполняться неравенство

$$|S|^2\leqslant\left|\sum_{x=1}^{\lambda P} e^{2\pi i m F_1(x)}\right|^2.$$

Применим неравенство Ван дер Корпута [4] в следующей форме:

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m F_1(x)}\right|^2 \leqslant 2\frac{P^2}{N}+P\max_{1\leqslant h\leqslant N}\left|\sum_{x=1}^{P-h} e^{\frac{2\pi i m\Delta F_1(x)}{h}}\right|.$$

Пользуясь условиями теоремы, получим

$$|S|^2\leqslant 2\frac{\lambda^2P^2}{N}+2\lambda^2+2c_0\lambda(P+1)\varphi(N)(\lambda P+\lambda)^{1-\rho},$$

$$|S|^2< c_1\lambda^2P^2\left(\frac{1}{N}+\varphi(N)P^{1-\rho}\right).$$

Выбирая $N=[\psi(P^\rho)]$, получаем отсюда утверждение теоремы.

Как показано в [3], существуют величины α, для которых

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i\alpha q^x}\right| < (4\pi+1)\,q\sqrt{P} \quad (q\geqslant 2,\ \text{целое}).$$

Тем же методом, что и в [3], без труда получается более общая оценка:

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| < cm\sqrt{P}, \tag{3}$$

где $m\neq 0$ — произвольное целое и c — константа, зависящая только от q. Для величин α, удовлетворяющих неравенству (3), получим, пользуясь теоремой 2, следующее следствие.

Следствие 3. *Если α выбрано так, что выполняется оценка*

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m\alpha q^x}\right| < cm\sqrt{P},$$

то для любого целого $\lambda > 0$ будет:

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^{\lambda x}}\right| < c(m)\lambda \frac{P}{\sqrt{\ln P}}.$$

Действительно, полагая $F(x) = \alpha q^x$, получим

$$\underset{h}{\Delta} F(x) = \alpha(q^h - 1)q^x, \quad \left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \underset{h}{\Delta} F(x)}\right| < cmq^h\sqrt{P}.$$

Применим теорему 2 с $\varphi(x) = q^x$. Выбирая достаточно малое $c' > 0$, получим, что $\varphi(x) > c' \ln x$, следовательно

$$\left|\sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m \alpha q^{\lambda x}}\right| < c\lambda \frac{P}{\sqrt{c' \ln \sqrt{P}}} = c(m)\lambda \frac{P}{\sqrt{\ln P}}.$$

Заметим, что, в силу теоремы 2, из равномерности распределения $\underset{h}{\Delta} F(x)$ следует равномерность распределения $F(\lambda x)$ не только для постоянного λ, но также для некоторых функций $\lambda = \lambda(x)$, неограниченно возрастающих при $x \to \infty$. В частности, можно выбирать $\lambda(x)$ весьма медленно растущей кусочно-постоянной целочисленной функцией от x.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
3 III 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. И. Шапиро-Пятецкий, Изв. АН СССР, сер матем., **15**, № 1, 47 (1951). [2] Н. М. Коробов, ДАН, 84, № 1 (1952). [3] Н. М. Коробов, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 87 (1951). [4] J. G. van der Corput, Acta Math., **56**, 373 (1931).