Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

В. П. ПИЛАТОВСКИЙ

О ВЫЧИСЛЕНИИ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА АСИМПТОТИЧЕСКОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ СВОИМ ЛАПЛАСОВЫМ ИЗОБРАЖЕНИЕМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 7 II 1952)

1. В статье [1] доказана справедливость функционального разложения:

$$f(t)+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-\pi\sigma k/\lambda} f\left(t+\frac{\pi k}{\lambda}\right)=\frac{\lambda}{\pi}e^{\sigma t}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k=2n+1}}^{\infty} e^{ik\lambda t}F(\sigma+ik\lambda) \tag{1}$$

при $0<\lambda t<\pi$, $\sigma>0$, $\lambda>0$.

Там же на основании свойств разложения (1) предложен метод приближенного вычисления функции $f(t)$, заданной своим лапласовым изображением $F(s)$:

$$F(s)=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\,dt. \tag{2}$$

Если значения функции $f(t)$ с помощью (1) необходимо вычислить в интервале $0<t<T$, то число λ выбираем при условии

$$\lambda<\frac{\pi}{T}. \tag{3}$$

Поскольку функция $f(t)$ по абсолютной величине растет не сильнее, чем экспоненциальная функция $e^{\alpha t}$ $(\alpha>0)$, то, фиксировав λ при условии (3), мы сможем найти такое $\sigma>0$, чтобы второй член левой части равенства (1) был меньше заданного числа ε; таким образом, приближенно (погрешность не больше ε) будем иметь:

$$f(t)\approx\frac{\lambda}{\pi}e^{\sigma t}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k=2n+1}}^{\infty} e^{ik\lambda t}F(\sigma+ik\lambda). \tag{4}$$

Коэффициенты $F(\sigma+ik\lambda)$ тригонометрического ряда (4) вычисляются по дискретным значениям аналитической функции $F(s)$.

В некоторых случаях непосредственное применение тригонометрического ряда (4) для приближенного вычисления значений $f(t)$ может встретить затруднение вследствие медленного убывания абсолютной величины коэффициентов разложения (4). В этих случаях целесообразно ряд (4) использовать для нахождения остаточного члена асимптотического разложения функции $f(t)$.

2. Известно ([2]), что асимптотическому разложению изображения $F(s)$ в окрестности бесконечно удаленной точки $s=\infty$

$$F(s)=F_n(s)+o\left(\frac{1}{s^n}\right) \tag{5}$$

отвечает асимптотическое разложение оригинала $f(t)$ для малых положительных значений t

$$f(t)=f_n(t)+o(t^n), \tag{6}$$

причем справедливо функциональное отношение ([2])

$$F_n(s)\doteqdot f_n(t). \tag{7}$$

Если функцию $f_n(t)$ рассматривать в интервале $0<t<\pi/\lambda$, то погрешность $\delta_n(t)$ при замене $f(t)$ отрезком асимптотического разложения определяется так:

$$\delta_n(t)=f(t)-f_n(t). \tag{8}$$

Погрешность $\delta_n(t)$ можно рассматривать как остаточный член асимптотического разложения функции $f(t)$

$$f(t)=f_n(t)+\delta_n(t). \tag{9}$$

Лапласово изображение для остаточного члена $\delta_n(t)$ представим так:

$$\Delta_n(s)=F(s)-F_n(s). \tag{10}$$

Поправку $\delta_n(t)$ целесообразно вычислять на основании (4):

$$\delta_n(t)=\frac{\lambda}{\pi}e^{\sigma t}\sum_{\substack{k=-\infty\\ k=2n+1}}^{\infty}e^{ik\lambda t}\,\Delta_n(\sigma+ik\lambda). \tag{11}$$

Порядок убывания коэффициентов $\Delta_n(\sigma+ik\lambda)$ тригонометрического ряда (11) определяется равенством (5):

$$\Delta_n(\sigma+ik\lambda)=o\left[\left(\frac{1}{\sigma+ik\lambda}\right)^n\right]. \tag{12}$$

Найдя остаточный член $\delta_n(t)$ с помощью тригонометрического ряда (11), нетрудно вычислить значения функции $f(t)$ в интервале $0<t<\pi/\lambda$, пользуясь равенством (9).

Поступило
30 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. П. Пилатовский, ДАН, 82, № 2 (1952). [2] А. И. Лурье, Операционное исчисление и его приложение к задачам механики, 1950.