Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

М. К. КЕРИМОВ

О ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ ЭКСТРЕМУМА В РАЗРЫВНЫХ ВАРИАЦИОННЫХ ЗАДАЧАХ С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 4 III 1952)

В настоящей работе мы даем достаточные условия экстремума для нерегулярной вариационной задачи с разрывной подинтегральной функцией и с подвижными концами. Необходимые условия экстремума для такой задачи были получены ранее ([1,2]). (Необходимые и достаточные условия экстремума для регулярной разрывной вариационной задачи с закрепленными концами имеются в ([3,4]).)

Пусть в области $\overline{D}_1+\overset{+}{D}_2$* выделена замкнутая область $F=\overline{F}+\overset{+}{F}$, границей которой служит ломаная линия, состоящая из кусков кривых L_1 и L_2, а также других кривых с такими же свойствами, как и L_1 и L_2, причем F разделена на замкнутые области $\overline{F}$ и $\overset{+}{F}$ куском кривой L_0. Соответствующим образом определим замкнутую область $R=\overline{R}+\overset{+}{R}$. Если понадобится, то мы можем распространить функции $\overline{F}(x, \overline{y}, \overline{y}')$ и $\overset{+}{F}(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}')$ на бо́льшие, чем $\overline{R}$ и $\overset{+}{R}$, области с сохранением их свойств дифференцируемости.

Рассмотрим однопараметрическое семейство ломаных экстремалей

$$y=y(x,\beta)\begin{cases}\overline{y}(x,\beta), & x_1(\alpha)\leqslant x\leqslant x_0(\beta),\\ \overset{+}{y}(x,\beta), & x_0(\beta)\leqslant x\leqslant x_2(\gamma),\end{cases} \tag{1}$$

в котором содержится данная ломаная экстремаль E_{102} при $x_1\leqslant x\leqslant x_2$ и $\beta=\beta_0$.

Лемма 1. *Если для семейства ломаных экстремалей* (1) *функция y_β не обращается в нуль вдоль E_{102}, то существует множество точек* (x, β),

$$x_1(\alpha)\leqslant x\leqslant x_2(\gamma),\quad |\beta-\beta_0|<\varepsilon, \tag{2}$$

и окрестность F экстремали E_{102} на плоскости xy такие, что F однократно покрывается экстремалями (1) *для значений* (x,β) *из* (2), *причем функции наклона*

$$\overline{p}=\overline{p}(x,\overline{y})=\overline{y}_x[x,\overline{\beta}(x,\overline{y})], \tag{3}$$

$$\overset{+}{p}=\overset{+}{p}(x,\overset{+}{y})=\overset{+}{y}_x[x,\overset{+}{\beta}(x,\overset{+}{y})] \tag{3'}$$

* Обозначения и терминология сохраняются те же, что и в ([1,2]).

данного семейства, так же как и функции $\overline{\beta}(x, \overline{y})$, $\overset{+}{\beta}(x, \overset{+}{y})$, *имеют непрерывные частные производные до второго порядка включительно* (*ср.* ([5])).

Лемма 2. *Если на неособой ломаной экстремали* E_{102} *нет точки, сопряженной с точкой* 1, *то на продолжении* E_{102} *влево от* 1 *имеется такая точка* 1^*, *что ломаные экстремали, проходящие через* 1^*, *образуют однопараметрическое семейство вида* (1) *с функцией* $y_\beta \neq 0$ *вдоль* E_{102} (*ср.* ([5])).

С помощью этих лемм можно получить достаточные условия экстремума для случая закрепленных концов.

Имеет место теорема:

Если допустимая кривая E_{102} *имеет единственную угловую точку* O *на кривой* L_0 *и удовлетворяет условиям* I, I′, III′ *и* IV′ (*усиленное условие Якоби*), *то существует такая окрестность* R *множества элементов* (x, y, y') *кривой* E_{102}, *что выполняется неравенство* $J(C_{10'2}) > J(E_{102})$ *для всякой допустимой кривой* $C_{10'2}$, *лежащей в* R *и тождественно не совпадающей с* E_{102}.

Мы будем говорить, что кривая E_{102} удовлетворяет условию II_N (Вейерштрасса), если существует такая окрестность N множества элементов (x, y, y') кривой E_{102}, что для всех множеств элементов (x, y, y', Y'), для которых $(x, y, y') \in N$ и являются допустимыми, а (x, y, Y') являются допустимыми и $Y' \neq y'$, удовлетворяются неравенства

$$\mathscr{E}(x, y, y', Y') \begin{cases} \overline{\mathscr{E}}(x, \overline{y}, \overline{y}', \overline{Y}') \geqslant 0, \\ \overset{+}{\mathscr{E}}(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}', \overset{+}{Y}') \geqslant 0. \end{cases} \tag{4}$$

Если в (4) знак равенства исключен, то это условие мы обозначаем через II'_N.

Лемма 3. *Если неособая допустимая кривая* E_{102} *удовлетворяет условию* II_N, *то она удовлетворяет и условию* II'_N, *лишь бы* N *была выбрана достаточно малой.*

С помощью леммы 3 легко доказать следующую теорему.

Если неособая допустимая кривая E_{102}, *имеющая единственную угловую точку* O *на* L_0, *удовлетворяет условиям* I, I″, II_N, IV′, *то на плоскости* xy *существует такая окрестность* F *кривой* E_{102}, *что для любой допустимой кривой* $C_{10'2}$, *лежащей в* F *и тождественно не совпадающей с* E_{102}, *имеет место неравенство* $J(C_{10'2}) > J(E_{102})$.

Заметим, что выполнение условий I, I″, III′, II'_N, IV′ также обеспечивает сильный относительный минимум ([6]).

Определение поля ломаных экстремалей. Открытую область F на плоскости xy, склеенную по линии разрыва L_0 из односвязных областей $\overline{F}$ и $\overset{+}{F}$ (кривая L_0 одновременно принадлежит к обеим областям), имеющих, соответственно, функции наклона $\overline{p}(x, \overline{y})$ и $\overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})$, назовем полем ломаных экстремалей, если:

1) функции $\overline{p}(x, \overline{y})$ и $\overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})$ однозначны, имеют непрерывные частные производные первого порядка, соответственно, в $\overline{F}$ и $\overset{+}{F}$ и стремятся к конечным пределам при приближении (x, y) к кривой L_0;

2) функции $\overline{p}\{x_0(\beta), \overline{y}[x_0(\beta), \beta]\}$ и $\overset{+}{p}\{x_0(\beta), \overset{+}{y}[x_0(\beta), \beta]\}$ определяют два направления в обе стороны от кривой L_0, не касательные к L_0;

3) все элементы $[x, \bar{y}, \bar{p}(x, \bar{y})]$ и $[x, \overset{+}{y}, \overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})]$, определяемые точками $(x, \bar{y}) \in \bar{F}$, $(x, \overset{+}{y}) \in \overset{+}{F}$, являются допустимыми;

4) в точках кривой L_0 выполняется первичное условие разрыва (1);

5) интегралы Гильберта

$$\bar{I}_1^* = \int \{F[x, \bar{y}, \bar{p}(x, \bar{y})]\,dx + [d\bar{y} - \bar{p}(x, \bar{y})]\,F_{\bar{y}'}[x, \bar{y}, \bar{p}(x, \bar{y})]\}, \tag{5}$$

$$\overset{+}{I}{}_1^* = \int \{\overset{+}{F}[x, \overset{+}{y}, \overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})]\,dx + [d\overset{+}{y} - \overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})]\,F_{\overset{+}{y}'}[x, \overset{+}{y}, \overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})]\} \tag{6}$$

не зависят от путей интегрирования, соответственно, в $\bar{F}$ и $\overset{+}{F}$.

Можно доказать, что в полях $\bar{F}$ и $\overset{+}{F}$ решения дифференциальных уравнений

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \bar{p}(x, \bar{y}), \quad \frac{d\overset{+}{y}}{dx} = \overset{+}{p}(x, \overset{+}{y}) \tag{7}$$

являются экстремалями. Тогда, воспользовавшись первичным условием разрыва, эти экстремали можно склеить и получить ломаные экстремали поля F. Уравнения (7) мы назовем дифференциальными уравнениями поля ломаных экстремалей F. Ломаная экстремаль E_{102} поля F обладает тем свойством, что

$$J(E_{10}) + J(E_{02}) = \bar{I}_1^*(E_{10}) + \overset{+}{I}{}_1^*(E_{02}).$$

Интегральная формула Вейерштрасса. Если E_{102} — ломаная экстремаль поля F с функциями наклона $\bar{p}(x, \bar{y})$ и $\overset{+}{p}(x, \overset{+}{y})$, то для всякой допустимой кривой $C_{10'2}$, лежащей в поле и соединяющей концы 1 и 2 экстремали E_{102}, справедлива следующая интегральная формула Вейерштрасса:

$$J(C_{10'2}) - J(E_{102}) = \int\limits_{x_1}^{x_0(\beta)} \bar{\mathscr{E}}(x, \bar{y}, \bar{y}', \bar{p})\,dx + \int\limits_{x_0(\beta)}^{x_2} \overset{+}{\mathscr{E}}(x, \overset{+}{y}, \overset{+}{y}', \overset{+}{p})\,dx, \tag{8}$$

где переменные $\bar{y}$ и $\overset{+}{y}$ нужно заменить через $\bar{y}(x)$ и $\overset{+}{y}(x)$, определяющие кривую $C_{10'2}$.

С помощью (8) доказывается следующая основная теорема о достаточных условиях:

Если E_{102} — ломаная экстремаль поля F и если в каждой точке области F выполнено (4) с заменой $\bar{Y}'$ и $\overset{+}{Y}'$ через $\bar{p}$ и $\overset{+}{p}$, $\bar{p} \neq \bar{y}'$, $\overset{+}{p} \neq \overset{+}{y}'$, то для любой допустимой кривой $C_{10'2}$, лежащей внутри F и соединяющей точки 1 и 2 экстремали E_{102}, справедливо соотношение $J(C_{10'2}) \geqslant J(E_{102})$. Если в (4) фигурирует только знак неравенства, то $J(C_{10'2}) > J(E_{102})$, исключая тот случай, когда $C_{10'2}$ тождественно совпадает с E_{102}.

Нетрудно указать условия, при которых можно построить поле ломаных экстремалей.

Теперь перейдем к задаче с подвижными концами.

Пусть E_{102} — неособая ломаная экстремаль, которая пересекает кривые L_1, L_0, L_2 в точках 1, 0, 2, не касаясь с ними. На кривых L_1 и L_2 вводим новый параметр t и построим для функционала J так называемый интеграл от экстремалей. Если концы E_{102} не сопряжены друг с другом, то можно построить однопараметрическое семейство ломаных экстремалей вида (1), в котором содержится E_{102} при $t = 0$. Вдоль этого семейства функционал J превращается в функцию $J(t)$. Если E_{102} реализует минимум функционала J, то $J(E_{102})$ является его минимальным значением.

Достаточные условия минимума мы докажем, используя следующее обобщение важной вспомогательной теоремы Хана.

Теорема 1. *Пусть неособая ломаная экстремаль E_{102} содержится при $t = 0$ в однопараметрическом семействе ломаных экстремалей вида* (1). *Пусть на E_{102} нет точек, сопряженных с точкой* 1. *Пусть, наконец, E_{102} удовлетворяет условию II_N. Тогда существуют такие постоянная $\varepsilon > 0$ и окрестность F кривой E_{102} на плоскости xy, что для любой ломаной экстремали E_t семейства* (1), *соответствующей значению параметра t, удовлетворяющему неравенству $|t| < \varepsilon$, выполняется неравенство $J(C_t) > J(E_t)$, где C_t — любая допустимая кривая, лежащая в F, соединяющая концы кривой E_t и тождественно не совпадающая с E_t. Если E_{102} удовлетворяет условию* III *вместо II_N, то существуют такие постоянная $\varepsilon > 0$ и окрестность R множества элементов (x, y, y') кривой E_{102}, что сформулированное выше утверждение остается справедливым, если в нем заменить F через R и плоскость xy на пространство R* (ср. ([5,7])).

Теорема 2. *Пусть E_{102} — допустимая кривая, имеющая только одну угловую точку, которая лежит на L_0 и имеет только по одной общей точке с кривыми L_1 и L_2.*

Если E_{102} удовлетворяет достаточным условиям сильного относительного минимума для задачи с закрепленными концами, то она содержится при $t = 0$ в однопараметрическом семействе ломаных экстремалей (1), *пересекающих L_1, L_0, L_2. Если, далее, функция $J(t)$ имеет относительный минимум при $t = 0$, то $J(E_{102})$ дает сильный относительный минимум функционала J в следующем смысле: на плоскости xy существует такая окрестность F кривой E_{102}, что для всякой допустимой кривой C_t, лежащей в F и пересекающей кривые L_1, L_0, L_2, выполняется соотношение $J(C_t) \geqslant J(E_{102})$. Если функция $J(t)$ при $t = 0$ имеет строгий минимум, то $J(E_{102})$ также дает строгий относительный минимум. Если E_{102} удовлетворяет достаточным условиям слабого относительного минимума для задачи с закрепленными концами, то все утверждения, высказанные в первой части теоремы, сохраняют силу, если заменить в них слово «сильный» на «слабый», а «окрестность F» на «окрестность R» множества элементов (x, y, y') кривой E_{102}.*

Исходя из всего предыдущего, можно доказать основной результат настоящей работы:

Теорема 3. *Пусть E_{102} — допустимая кривая, имеющая только одну угловую точку на L_0 и только по одной общей точке с L_1 и L_2. Если E_{102} удовлетворяет условиям* I, I′, I″, III′ *и* IV′, *то она реализует слабый относительный минимум функционала J в классе всех допустимых кривых, пересекающих кривые L_1, L_0, L_2. Если допустимая кривая E_{102} удовлетворяет условиям* I, I′, I″, III′, II'_N *и* IV′, *то она реализует сильный относительный минимум функционала J.*

Эту же теорему можно доказать и в случае, если условие Якоби выражено в терминах собственных значений, а также для случая периодических ломаных экстремалей.

Институт точной механики и
вычислительной техники
Академии наук СССР

Поступило
6 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. К. Керимов, ДАН, 79, № 4 (1951). [2] М. К. Керимов, ДАН, 79, № 5 (1951). [3] M. Mason and G. Bliss, Trans. Am. Math. Soc., 7, 325 (1906). [4] Н. М. Гюнтер, Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1941. [5] Г. Блисс, Лекции по вариационному исчислению, пер. с англ., М., 1950. [6] М. А. Лаврентьев и Л. А. Люстерник, Курс вариационного исчисления, М.—Л., 1950. [7] Hahn, Monatsh. f. Math. u. Phys., 22, 127 (1911).