Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

ОБРАЩЕНИЕ ТЕОРЕМ ДЖЕКСОНА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 14 II 1952)

Введем следующие обозначения: $\tilde{C}$ — пространство функций $f(x)$, вещественных, непрерывных и 2π-периодических на $(-\infty, \infty)$ с нормой

$$\|f\|_{\tilde{C}} \equiv \max_x |f(x)|.$$

Ω^* — множество функций $\omega(u)$, удовлетворяющих следующим условиям: 1) $\omega(u)$ непрерывна при $0 \leqslant u < \infty$, 2) $0 < \omega(u') \leqslant \omega(u'')$ при $0 < u' \leqslant u''$, 3) $\omega(0) = 0$.

Если p — натуральное число, h — вещественное число, $f \in \tilde{C}$, то $\Delta_h^p f$ означает функцию, определенную формулой

$$\Delta_h^p f(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} f(x + kh).$$

Если p — натуральное число, $f \in \tilde{C}$, то определим функцию $\omega_p(f, u)$ формулой

$$\omega_p(f, u) = \max_{|h| \leqslant u} \|\Delta_h^p f\|_{\tilde{C}}.$$

Функция $\omega_p(f, u)$ называется модулем непрерывности порядка p функции f.

Если $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ суть две последовательности положительных чисел, то запись $\alpha_n \simeq \beta_n$ означает, что существуют константы m и M такие, что $0 < m \leqslant \frac{\alpha_n}{\beta_n} \leqslant M$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$

Если $\alpha(u)$ и $\beta(u)$ суть две функции, определенные и положительные при $0 < u < \infty$, то запись $\alpha(u) \simeq \beta(u)$ означает, что существуют константы m и M такие, что $0 < m \leqslant \frac{\alpha(u)}{\beta(u)} \leqslant M$ при всех достаточно малых $u > 0$.

Если r — натуральное число, то $\tilde{C}^{(r)}$ означает множество тех функций $f \in \tilde{C}$, которые имеют непрерывные производные первых r порядков.

Если $f \in \tilde{C}$ и n — натуральное число, то положим

$$E_n(f) = \min_{T_n} \|f - T_n\|_{\tilde{C}},$$

где min берется по всем тригонометрическим полиномам порядка $\leqslant n$.

Известны следующие результаты:

I. Если p — натуральное число и $f \in \tilde{C}$, то

$$E_n(f) = O\left[\omega_p\left(f, \frac{1}{n}\right)\right].$$

II. Если p и r — натуральные числа и $f \in \tilde{C}^{(r)}$, то

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\omega_p\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)\right].$$

При $p=1$ это известные теоремы Джексона. Случай $p=2$ рассматривался рядом авторов. Приведенные здесь формулировки принадлежат С. Б. Стечкину (1).

Рассмотрим вопрос об обращении этих теорем.

Теорема 1. *Пусть p — натуральное число, $\omega \in \Omega^*$ и существует число $K > 1$ такое, что*

$$\overline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} < K^p. \tag{1,1}$$

Тогда, если $f \in \tilde{C}$, то для того, чтобы

$$\omega_p(f, u) = O[\omega(u)], \tag{1,2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) = O\left[\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{1,3}$$

Если же числа $K > 1$, удовлетворяющего (1,1), не существует, то найдется $f \in \tilde{C}$ такая, что выполнено (1,3), но не выполнено (1,2).

Теорема 2. *Пусть p и r — натуральные числа, $\omega \in \Omega^*$ и существует число $K > 1$ такое, что*

$$1 < \underline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} \leqslant \overline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} < K^p. \tag{2,1}$$

Тогда, если $f \in \tilde{C}$, то для того, чтобы

$$f \in \tilde{C}^{(r)} \quad и \quad \omega_p(f^{(r)}, u) = O[\omega(u)], \tag{2,2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) = O\left[\frac{1}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right]. \tag{2,3}$$

Если же числа $K > 1$, удовлетворяющего (2,1), не существует, то найдется $f \in \tilde{C}^{(r)}$ такая, что выполнено (2,3), но не выполнено (2,2).

Теорема 3. *Пусть p — натуральное число, $\omega \in \Omega^*$ и существует $K > 1$ такое, что*

$$\overline{\lim_{u\to 0+}} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} < K^p. \tag{3,1}$$

Тогда, если $f \in \tilde{C}$, то для того, чтобы

$$\omega_p(f, u) \simeq \omega(u), \tag{3,2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) \simeq \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{3,3}$$

Если же числа $K > 1$, *удовлетворяющего* (3,1), *не существует, то найдется* $f \in \tilde{C}$ *такая, что выполнено* (3,3), *но не выполнено* (3,2).

Теорема 4. *Пусть* p *и* r — *натуральные числа,* $\omega \in \Omega^*$ *и существует* $K > 1$ *такое, что*

$$1 < \underline{\lim}_{u \to 0+} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} \leqslant \overline{\lim}_{u \to 0+} \frac{\omega(Ku)}{\omega(u)} < K^p. \tag{4,1}$$

Тогда, если $f \in \tilde{C}$, *то для того, чтобы*

$$f \in \tilde{C}^{(r)} \quad \text{и} \quad \omega_p(f^{(r)}, u) \simeq \omega(u), \tag{4,2}$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$E_n(f) \simeq \frac{1}{n^r}\, \omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{4,3}$$

Если же числа $K > 1$, *удовлетворяющего* (4,1), *не существует, то найдется* $f \in \tilde{C}^{(r)}$ *такая, что выполнено* (4,3), *но не выполнено* (4,2).

Каждая из теорем 1—4 состоит из «положительного» и «отрицательного» утверждения. В «положительном» утверждении говорится, что если функция $\omega \in \Omega^*$ удовлетворяет условию (ν, 1) (ν — номер теоремы), то соотношения (ν, 2) и (ν, 3) равносильны. В «отрицательном» утверждении говорится, что если функция $\omega \in \Omega^*$ нарушает названное условие, то соотношения (ν, 2) и (ν, 3) уже не равносильны, и указывается, в каком именно смысле они не равносильны. Эти теоремы обобщают ряд результатов С. Н. Бернштейна ([2]), Валле-Пуссена ([3]), Зигмунда ([4]) и С. Б. Стечкина ([1]). Названные авторы устанавливали различные достаточные условия для $\omega(u)$, при выполнении которых соотношения (ν, 2) и (ν, 3) равносильны ($\nu = 1, 2, 3$). Вопрос о равносильности соотношений (4,2) и (4,3), насколько мне известно, в литературе не рассматривался. Однако С. Б. Стечкин доказал (в еще неопубликованной работе), что при $\omega(u) = u^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ и при $\omega(u) = u$, $p = 2, 3, 4, \ldots$ соотношения (4,2) и (4,3) равносильны. Этот результат есть, очевидно, важнейший частный случай «положительного» утверждения теоремы 4. С. Б. Стечкин любезно сообщил мне идею своего доказательства. Мое доказательство «положительного» утверждения теоремы 4 получено позже названного результата С. Б. Стечкина, но, повидимому, отлично по методу. «Отрицательные» утверждения теорем 1—4 доказываются построением специальных примеров.

Результаты этой работы справедливы не только в пространстве $\tilde{C}$, но и в функциональных пространствах типа $\tilde{F}_6$, введенных в моей работе ([5]).

Поступило
4 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Б. Стечкин, Изв. АН СССР, сер. матем., **15**, № 3, 219 (1951). [2] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, (2), **13**, 49 (1912). [3] Ch. de la Vallée-Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle, Paris, 1919. [4] A. Zygmund, Duke Math. Journ., **12**, 47 (1945). [5] С. М. Лозинский, ДАН, **64**, № 4, 453 (1949).