Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ВОРОБЬЕВ

ОБ ИДЕАЛАХ АССОЦИАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 II 1952)

Ассоциативной системой (в дальнейшем просто «системой») называется, как обычно, множество с одной однозначной бинарной ассоциативной операцией («умножением»).

Подмножество $\mathfrak{T}$ системы $\mathfrak{S}$ называется ее левым идеалом, если $\mathfrak{S}\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$, правым идеалом, если $\mathfrak{T}\mathfrak{S} \subset \mathfrak{T}$, и двусторонним идеалом (просто «идеалом»), если выполнены оба эти условия.

Богатство и разветвленность результатов современной теории дискретных групп во многом обязано изучению групп, удовлетворяющих тем или иным «условиям конечности» (1). Особенно часто используются группы, в которых выполняются условия минимальности для нормальных делителей.

Наблюдаемая далеко идущая аналогия между нормальными делителями групп, с одной стороны, и идеалами систем, с другой, позволяет надеяться, что исследования систем с условиями минимальности для их идеалов приведут к выявлению многих существенных свойств таких систем и, в конечном итоге, к более или менее детальному их описанию.

Оказывается удобным ввести в рассмотрение так называемые главные левые, правые и двусторонние идеалы (т. е., соответственно, множества вида $\mathfrak{S}X \cup X$, $X\mathfrak{S} \cup X$, $\mathfrak{S}X\mathfrak{S} \cup X\mathfrak{S} \cup \mathfrak{S}X \cup X$ для некоторого $X \in \mathfrak{S}$) и рассматривать системы, удовлетворяющие одному из условий минимальности для главных левых, правых или двусторонних идеалов. Такие системы мы будем называть соответственно L-, P- и D-системами.

Системы, являющиеся одновременно L- и P-системами, рассматривались Грином (2), доказавшим ряд теорем о строении таких систем.

Однако одновременное выполнение условий минимальности для главных левых и правых идеалов системы может оказаться слишком стеснительным, да и практически эти условия играют совсем различную роль, если трактовать систему $\mathfrak{S}$ как систему отображений некоторого множества $\mathfrak{N}$ в себя (под произведением отображений AB понимается последовательное выполнение отображений B и A). Такая трактовка не только возможна, но и естественна, так как абстрактная теория систем, в сущности, и выросла из необходимости изучения конкретных систем отображений множеств в себя: вырожденных матриц, эндоморфизмов групп и т. п. Наличие в $\mathfrak{S}$ идеалов означает неразрешимость в $\mathfrak{S}$ в ряде случаев уравнений вида $AX = B$ и $XA = B$ (A, $B \in \mathfrak{S}$), т. е., в некотором смысле, необратимость тех или иных отображений. Левые идеалы $\mathfrak{S}$ соответствуют при этом необратимости отображений, получающейся за счет отображения нескольких элементов $\mathfrak{R}$ в один. Правые же идеалы $\mathfrak{S}$ соответствуют необратимости, получающейся в результате отображения $\mathfrak{R}$ на его правильную часть. Например, в случае эндоморфизмов групп левые идеалы системы связаны с ядрами эндоморфизмов, а правые ее идеалы — с эндоморфными образами группы.

Целью настоящей заметки является изложение некоторых результатов, относящихся к L-системам. Очевидно, для P-систем справедливы симметричные теоремы.

Главный левый идеал $\mathfrak{S}X \cup X$ системы $\mathfrak{S}$ называется порожденным элементом X. Совокупность элементов системы $\mathfrak{S}$, порождающих один и тот же ее главный левый идеал, называется левоидеальной компонентой $\mathfrak{S}$. Аналогично определяются правоидеальные и идеальные компоненты системы.

Будем называть два левых (правых, двусторонних) идеала $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ ($\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$) системы $\mathfrak{S}$ соседними, если для всякого левого (соответственно, правого, двустороннего) идеала $\mathfrak{T}$ системы $\mathfrak{S}$ из $\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}_1$ следует либо $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_1$, либо же $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_2$.

Теоретико-множественная разность любых двух соседних левых (правых, двусторонних) идеалов системы является ее левоидеальной (правоидеальной, идеальной) компонентой. Наоборот, всякая левоидеальная (правоидеальная, идеальная) компонента $\mathfrak{R}$ системы является теоретико-множественной разностью некоторой пары соседних левых (соответственно, правых, двусторонних) идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ этой системы. Заметим, что указанная пара $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ по данной компоненте $\mathfrak{R}$ определяется, вообще говоря, неоднозначно.

Далее, всякая идеальная компонента системы есть теоретико-множественная сумма некоторого семейства левоидеальных ее компонент. Оказывается при этом, что левоидеальные компоненты при весьма общих предположениях входят в идеальную в некотором смысле равноправно.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{R}$ — идеальная компонента системы $\mathfrak{S}$, являющаяся теоретико-множественной разностью соседних идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ системы $\mathfrak{S}$ ($\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$). Тогда, если существует хотя бы одна левоидеальная компонента $\mathfrak{R}_1^-$, для которой $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{R}_1^-$ есть левый идеал $\mathfrak{S}$, то для всякой другой левоидеальной компоненты $\mathfrak{R}_2^- \subset \mathfrak{R}$ множество $\mathfrak{T}_2 \cup \mathfrak{R}_2^-$ также является левым идеалом $\mathfrak{S}$.*

Для случая L-систем эта теорема была доказана Грином ([2]).

Назовем системой Сушкевича систему, не содержащую левых идеалов (кроме самой системы). Известно ([3]), что система Сушкевича, обладающая идемпотентами, есть теоретико-множественная сумма изоморфных групп (по терминологии Сушкевича — левая группа). Системы Сушкевича, не содержащие идемпотентов, будем называть собственно системами Сушкевича.

Пусть $\mathfrak{R}$ — идеальная компонента системы $\mathfrak{S}$, являющаяся теоретико-множественной разностью соседних идеалов $\mathfrak{T}_1$ и $\mathfrak{T}_2$ ($\mathfrak{T}_2 \subset \mathfrak{T}_1$). Пусть, далее, φ — гомоморфизм $\mathfrak{S}$, отождествляющий все элементы $\mathfrak{T}_2$ и не меняющий остальных элементов $\mathfrak{T}_1$. Такой гомоморфизм, очевидно, всегда существует. Система $\varphi\mathfrak{T}_1$ называется при этом фактором ([4]) системы $\mathfrak{S}$, соответствующим идеальной компоненте $\mathfrak{R}$.

Теорема 2. *Всякий фактор L-системы есть теоретико-множественная сумма попарно не пересекающихся систем Сушкевича и нулевых систем с общим нулем.*

(Под нулем системы $\mathfrak{H}$ здесь понимается, как обычно, такой элемент $O_{\mathfrak{H}} \in \mathfrak{H}$, что $\mathfrak{H}O_{\mathfrak{H}} = O_{\mathfrak{H}}\mathfrak{H} = O_{\mathfrak{H}}$, а под нулевой системой — система с нулем, произведение любых двух элементов которой равно нулю.)

Уточнением этой теоремы является

Теорема 3. *Все максимальные системы Сушкевича, содержа-*

щиеся в одном факторе L-системы, либо одновременно являются собственно системами Сушкевича, либо левыми группами.

Из этих теорем вытекает

Теорема 4. *Если L-система $\mathfrak{S}$ обладает единственным максимальным левым идеалом $\mathfrak{L}$, то $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{L}$ либо состоит из одного элемента, либо есть система Сушкевича.*

Теорема 5. *Если L-система $\mathfrak{S}$ обладает универсальной правой единицей, то $\mathfrak{S}$ имеет единственный максимальный левый идеал $\mathfrak{L}$, и $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{L}$ есть левая группа.*

Теорема 6. *Если L-система $\mathfrak{S}$ обладает универсальной левой единицей, то $\mathfrak{S}$ имеет единственный максимальный правый идеал $\mathfrak{P}$, и $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{P}$ есть правая группа.*

Заметим, что теоремы 5 и 6 не симметричны друг другу, так как в L-системах упорядоченные по включению семейства всех левых и всех правых идеалов устроены, вообще говоря, существенно различным образом.

Пусть $\mathfrak{S}$—L-система и φ—некоторый ее гомоморфизм. Тогда, как это можно показать, система $\varphi\mathfrak{S}$ также является L-системой, и к ней применимы все предыдущие теоремы. Применяя их, в частности, к фактор-системам $\mathfrak{S}$ в смысле Ляпина ([5]), т. е. к образам простых гомоморфизмов $\mathfrak{S}$, получаем следующую теорему.

Теорема 7. *Если $\mathfrak{S}$—L-система и $\mathfrak{N}$—ее нормальная подсистема ([5]), то либо $\mathfrak{S}$ распадается на теоретико-множественную сумму своей нормальной подсистемы и двустороннего идеала, либо же $\mathfrak{S} / \mathfrak{N}$ есть группа.*

Отсюда получается удобный критерий простоты системы (в смысле отсутствия у нее нетривиальных нормальных подсистем) с нулем.

Теорема 8. *L-система $\mathfrak{S}$ с нулем не имеет нетривиальных (т. е. отличных от $\mathfrak{S}$) нормальных подсистем тогда и только тогда, когда ни для какого ее двустороннего идеала $\mathfrak{T}$ $\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{T}$ не является подсистемой $\mathfrak{S}$.*

Е. С. Ляпин в ([6]) определяет левый увеличительный элемент системы $\mathfrak{S}$ как такой ее элемент G, что найдется подмножество $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{S}$, отличное от $\mathfrak{S}$, для которого $G\mathfrak{N} = \mathfrak{S}$. Симметрично определяются и правые увеличительные элементы системы $\mathfrak{S}$.

В цитированной работе доказывается, что множество всех левых увеличительных элементов $\mathfrak{S}$, обозначаемое через $\mathfrak{S}^-$, множество всех ее правых увеличительных элементов, обозначаемое через $\mathfrak{S}^+$, а также $(\mathfrak{S} \setminus \mathfrak{S}^-) \setminus \mathfrak{S}^+$ (обозначение $\mathfrak{S}^0$) суть попарно непересекающиеся подсистемы $\mathfrak{S}$.

Там же ставятся следующие проблемы: какие системы могут выступать в роли одной из подсистем $\mathfrak{S}^-$, $\mathfrak{S}^0$ и $\mathfrak{S}^+$ для некоторой системы $\mathfrak{S}$; в каком случае системы $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ могут быть вложены в некоторую систему $\mathfrak{S}$ так, чтобы $\mathfrak{S}^- = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}^0 = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}^+ = \mathfrak{C}$.

Оказывается, в случае, когда система $\mathfrak{S}$ есть L-система, эти проблемы могут быть решены сравнительно просто.

Теорема 9. *Какова бы ни была L-система $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}^-$ пусто, $\mathfrak{S}^0$ есть $\mathfrak{S}$ или единственный максимальный левый идеал $\mathfrak{S}$, а $\mathfrak{S}^+$ либо пусто, либо же является левоидеальной компонентой $\mathfrak{S}$ и притом собственно системой Сушкевича.*

Наоборот, каковы бы ни были L-система $\mathfrak{B}$ и собственно-система Сушкевича $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C} = \Lambda$), существует хотя бы одна L-система $\mathfrak{S}$, для которой $\mathfrak{S}^- = \Lambda$, $\mathfrak{S}^0 = \mathfrak{B}$ и $\mathfrak{S}^+ = \mathfrak{C}$.

В частности, L-система с единицей увеличительными элементами обладать не может.

Поступило
21 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош и С. Н. Черников, Усп. матем. наук, **2**, 3 (19), 18 (1947). [2] J. A. Green, Ann. of Math., **54**, 1, 163 (1951). [3] А. К. Сушкевич, Теория обобщенных групп, 1937. [4] D. Rees, Proc. Cambr. Phil. Soc., **36**, 387 (1940). [5] Е. С. Ляпин, Матем. сборн., **20** (62): 3, 497 (1947). [6] Е. С. Ляпин, Уч. зап. Ленингр. гос. пед. ин-та им. Герцена, 89 (1951).