

И. П. ЕГОРОВ

**ТЕНЗОРНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МАКСИМАЛЬНО
ПОДВИЖНЫХ A_n НЕНУЛЕВОЙ КРИВИЗНЫ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 13 III 1952)

В этой работе мы решаем задачу определения в X_n пространств аффинной связности A_n ненулевой кривизны, которые обладают максимальной подвижностью, т. е. допускают полные группы движений наибольшего порядка, равного, как известно, n^2 (1), и выписываем в тензорной форме необходимые и достаточные условия того, чтобы заданное A_n ненулевой кривизны было максимально подвижным в указанном смысле.

1. Если A_n ненулевой кривизны является максимально подвижным, то из теоремы о движениях в пространствах \bar{D}_n следует (2), что оно является проективно-евклидовым пространством.

2. Первые соотношения условий интегрируемости уравнений относительно компонент бесконечно малого движения V^σ и $V_{,\sigma}^\sigma$, как известно, будут вида

$$D_L R_{\beta\gamma\delta}^\alpha = 0, \quad (1)$$

где $R_{\beta\gamma\delta}^\alpha$ — составляющие тензора кривизны A_n ; D_L — лиево дифференцирование (3) вдоль V^σ .

Контрактирование соотношений (1) по индексам α, β и по индексам α, δ дает равенства

$$D_L S_{\alpha\beta} = 0, \quad (2)$$

$$D_L R_{\beta\gamma} = 0, \quad (3)$$

в которых положено

$$S_{\alpha\beta} = R_{\sigma\alpha\beta}^\sigma. \quad (4)$$

В соотношениях (2) коэффициенты в уравнениях

$$(\alpha_1\alpha_2), (\alpha_1, \alpha_3), \dots, (\alpha_1\alpha_n), (\alpha_2\alpha_3), (\alpha_2\alpha_4), \dots, (\alpha_2\alpha_n)$$

при функциях

$$V_{,\alpha_2}^{\alpha_2}, V_{,\alpha_3}^{\alpha_2}, \dots, V_{,\alpha_n}^{\alpha_2}, V_{,\alpha_2}^{\alpha_1}, V_{,\alpha_3}^{\alpha_1}, \dots, V_{,\alpha_n}^{\alpha_1}$$

будут вида

$$T_{\alpha_1(\alpha_1\alpha_j)}^{\alpha_1} = \delta_j^i S_{\alpha_1\alpha_2} = -T_{\alpha_1(\alpha_2\alpha_j)}^{\alpha_1} \quad (i \geq j = 3, 4, \dots, n),$$

$$T_{\alpha_1(\alpha_1\alpha_j)}^{\alpha_1} = T_{\alpha_2(\alpha_1\alpha_2)}^{\alpha_1} = 0 \quad (i = 3, 4, \dots, n; j = 2, 3, \dots, n).$$

Они показывают, что всякое A_n , обладающее группой движений порядка $r > n^2 - n + 3$, эквиаффинное. Соединяя выводы пп. 1, 2, мы заключаем, что A_n является одновременно проективно-евклидовым и эквиаффинным, т. е.

$$A_n \text{ — эквипроективное (4)}. \quad (a)$$

3. Для получения других необходимых условий докажем следующую теорему, представляющую также и самостоятельный интерес.

Теорема. Максимально подвижные пространства аффинной связности с систематической частью тензора Риччи ранга m обладают транзитивными полными группами движений, содержащими $n^2 + n - nm + \frac{m(m-1)}{2}$ параметров.

Введем, с одной стороны, для установления этого результата в окрестности некоторой регулярной точки M систему координат, реализующую приведение в этой точке матрицы симметрической части тензора Риччи к диагональному виду. Соотношения (3) позволяют нетрудным путем извлечь в этих условиях по крайней мере $nm - \frac{m(m-1)}{2}$ независимых связей лишь относительно функций $V_{\alpha\beta}^{\alpha}$. С другой стороны, как показывает исследование П. А. Широкова (5), группы движений симметрических проективно-евклидовых пространств с тензором Риччи ранга m действительно содержат $n^2 + n - nm + \frac{m(m-1)}{2}$ параметров.

Из этой теоремы непосредственно следует, что ранг тензора Риччи максимально подвижных пространств A_n ненулевой кривизны равен 1, следовательно,

$$R_{\alpha\beta} = (1 - n)\varepsilon\lambda_{\alpha\beta} \quad (\varepsilon = \pm 1). \quad (b)$$

4. Вставляя эти составляющие $R_{\alpha\beta}$ в соотношения (3), находим, что

$$\lambda_{(\alpha} D_L \lambda_{\beta)} = 0. \quad (5)$$

В нашем случае $\lambda_{\alpha} \neq 0$, следовательно,

$$D_L \lambda_{\beta} = 0. \quad (6)$$

Используя коммутативность операций левого и ковариантного дифференцирования, будем иметь

$$D_L \lambda_{\beta, \gamma} = 0. \quad (7)$$

Альтернирование этих соотношений, если учесть рассуждения п. 2, дает $\lambda_{[\beta, \gamma]} = 0$, т. е. λ_{β} — градиентный вектор: $\lambda_{\beta} = d_{\beta}\lambda$. Дифференцирование (b) по γ и альтернирование полученного результата по индексам β, γ дает

$$\lambda_{\alpha, [\beta\lambda_{\gamma}]} = 0.$$

Из этих соотношений следует, что симметрический тензор $\lambda_{\alpha, \beta}$ представляется в виде

$$\lambda_{\alpha, \beta} = \sigma\lambda_{\alpha}\lambda_{\beta}, \quad (8)$$

где σ — некоторый инвариант. Условия интегрируемости этих уравнений для эквипроективного A_n с тензором Риччи (a) имеют вид

$$\lambda_{\alpha}\lambda_{[\beta\sigma, \gamma]} = 0,$$

откуда следует, что инвариант σ является некоторой функцией лишь λ . Вставляя выражения $\lambda_{\alpha, \beta}$ из формул (8) в (7), получим

$$\frac{d\sigma}{d\lambda} D_L \lambda = 0.$$

Докажем, что функция $\sigma(\lambda)$ постоянна. В самом деле, пусть $D_L \lambda = 0$. Это уравнение вместе с n независимыми уравнениями (6) дает $n+1$ независимых соотношений над функциями V^σ , V_{τ}^σ и порядок группы движений $\leq n^2 - 1$, что противоречит условию задачи. Формулы (8) окончательно могут быть переписаны в виде

$$\lambda_{\alpha, \beta} = C \lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad (c)$$

где C — некоторая постоянная. Итак, мы пришли к тому, что искомые A_n необходимо являются эквипроективными, для которых выполняются условия (b) и (c).

5. Рассмотрим теперь вопрос о существовании A_n ненулевой кривизны, удовлетворяющих условиям (a), (b), (c). Выберем для этого проективно декартову систему координат, в которой, как известно, коэффициенты искомой связности $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$ будут вида

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = -\delta_\beta^\alpha \psi_\gamma - \delta_\gamma^\alpha \psi_\beta,$$

где $\psi_\gamma = \partial_\gamma \psi$. Учитывая (a) и известные выражения составляющих тензора $R_{\alpha\beta}$ в введенной системе координат, мы получим

$$\partial_{\alpha\beta} \psi = -\partial_\alpha \psi \partial_\beta \psi + \varepsilon \lambda_\alpha \lambda_\beta, \quad (b')$$

где, в силу (c), в которых дифференцирование ведется относительно $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha$, вектор $\lambda_\alpha = \partial_\alpha \lambda$. Система уравнений (b'), (c) при любом C вполне интегрируема. Правые части этой системы, не содержащие явным образом независимых переменных, аналитичны относительно производных первого порядка искомых функций ψ , λ .

Это позволяет нам сделать следующий вывод:

Теорема. *Существует единственное A_n ненулевой кривизны, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c) при фиксированном значении постоянной C , с функциями ψ , λ , принимающими в произвольно заданной точке наперед заданные начальные значения самих функций $(\psi)_0$, $(\lambda)_0$ и их первых производных $(\partial_\alpha \psi)_0$, $(\partial_\alpha \lambda)_0$, где последние n значений не обращаются одновременно в нуль.*

Из условий (a), (b), (c) следует, что однопараметрическое семейство $\lambda(x^1, x^2, \dots, x^n) = a$ представляет собою ∞^1 геодезических и параллельных X_{n-1} в A_n , локальные $(n-1)$ -направления каждого из которых ковариантно постоянны при параллельном перемещении вдоль соответствующего X_{n-1} .

6. Пусть A_n обозначает одно из построенных пространств ненулевой кривизны, удовлетворяющее условиям (a), (b), (c). Условия интегрируемости (1), равносильные условиям (3), будут равносильны, в силу (b), (5), условиям (6). Соотношения (6) дают n существенных связей, в противном случае все $\lambda_\alpha = 0$ и A_n является аффинно-евклидовым. Вставляя (c) в (7), получим, что соотношения интегрируемости второй серии являются следствиями условий (6), откуда следует, что движения составляют полную n^2 -параметрическую группу Ли.

Теорема. *A_n ненулевой кривизны тогда и только тогда обладает максимальной подвижностью, если выполнены условия (a), (b), (c), в которых C — некоторая постоянная.*

7. Отметим, что обращение постоянной C в нуль характеризует симметрическое эквипроективное пространство, и уравнения (b'), интегрирующиеся в конечном виде, приводят к случаю, рассмотренному П. А. Широковым (5).

Пензенский педагогический институт
им. В. Г. Белинского

Поступило
19 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. П. Егоров, ДАН, 64, № 5 (1949). ² И. П. Егоров, ДАН, '80, № 5 (1951). ³ Б. Л. Лаптев, Изв. физ.-матем. об-ва при Казанск. ун-те, 10, сер. 3 (1938). ⁴ А. П. Норден, Пространства аффинной связности, 1950, стр. 173. ⁵ П. А. Широков, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу, в. 8, 73 (1950).