Доклады Академии Наук СССР
1952, Том LXXXIII, № 5

МАТЕМАТИКА

С. В. ВАЛЛАНДЕР

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ДВУХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ДВУХ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 7 II 1952)

В приложениях часто встречаются системы двух линейных гиперболических уравнений, имеющие следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \eta} &= A(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} &= B(\xi, \eta) \frac{\partial x}{\partial \xi}. \end{aligned} \tag{1}$$

Решение краевых задач для этих уравнений существенно упрощается, если для системы (1) известно общее решение, содержащее две произвольные функции.

В настоящей заметке укажем класс систем (1), для которых общее решение легко находится.

1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + A_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + B_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \tag{2}$$

и решим вопрос о виде коэффициентов $A_1(\xi, \eta)$ и $B_1(\xi, \eta)$, при которых общее решение (2) представляется формулой

$$u = f_1(\xi, \eta) \Phi_1(\xi) + f_2(\xi, \eta) \Phi_2(\eta), \tag{3}$$

где f_1 и f_2 — некоторые фиксированные функции, а Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции своих аргументов.

Подставляя (3) в (2), получим уравнения для f_1 и f_2:

$$\begin{gathered} \frac{\partial f_1}{\partial \eta} + A_1 f_1 = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + B_1 f_2 = 0. \\ \frac{\partial^2 f_1}{\partial \xi \, \partial \eta} + A_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial f_1}{\partial \eta} = 0, \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial \xi \, \partial \eta} + A_1 \frac{\partial f_2}{\partial \xi} + B_1 \frac{\partial f_2}{\partial \eta} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Из первых уравнений (4) находим:

$$\begin{aligned} f_1(\xi, \eta) &= \varphi_1(\xi) e^{-\int_{\eta_0}^{\eta} A_1 d\eta}, \\ f_2(\xi, \eta) &= \varphi_2(\eta) e^{-\int_{\xi_0}^{\xi} B_1 d\xi}, \end{aligned} \tag{5}$$

где φ_1 и φ_2 — произвольные функции своих аргументов.

Подставляя (5) во вторые из уравнений (4), получим условия для A_1 и B_1:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi} + A_1 B_1 = 0,$$
$$\frac{\partial B_1}{\partial \eta} + A_1 B_1 = 0. \tag{6}$$

Эти условия встречаются и в работе Н. П. Еругина [1].

Из (6) имеем:

$$\frac{\partial A_1}{\partial \xi} = \frac{\partial B_1}{\partial \eta}. \tag{7}$$

Следовательно,

$$A_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \qquad B_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}. \tag{8}$$

Подставляя (8) в (6), получим уравнение

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \frac{\partial \Phi}{\partial \eta} = 0, \tag{9}$$

которому должна удовлетворять Φ, связанная с A_1 и B_1 соотношениями (8).

Положим

$$\Phi = \ln v.$$

Из (9) получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} = 0,$$
$$v = F_1(\xi) + F_2(\eta). \tag{10}$$

Поэтому из (8) имеем

$$A_1 = \frac{F_2'(\eta)}{F_1(\xi) + F_2(\eta)}, \qquad B_1 = \frac{F_1'(\xi)}{F_1(\xi) + F_2(\eta)}, \tag{11}$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции своих аргументов.

Следовательно, из уравнений (2) общее решение вида (3) имеют только уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{F_2'(\eta)}{F_1(\xi) + F_2(\eta)} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{F_1'(\xi)}{F_1(\xi) + F_2(\eta)} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0, \tag{12}$$

являющиеся обобщением известного уравнения Эйлера—Дарбу.

Если (2) имеет вид (12), то u имеет вид

$$u = \frac{\Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta)}{F_1(\xi) + F_2(\eta)}, \tag{13}$$

где Φ_1 и Φ_2 произвольны.

2. Рассмотрим теперь систему (1) и поставим вопрос о виде коэффициентов A и B, при которых x имеет вид (3).

Исключая из (1) y, получим для x уравнение

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi \, \partial \eta} + \frac{1}{A - B} \frac{\partial B}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{1}{A - B} \frac{\partial A}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0. \tag{14}$$

Следовательно, должно быть:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A-B}\frac{\partial B}{\partial \eta} &= \frac{F_2'(\eta)}{F_1(\xi)+F_2(\eta)}, \\ -\frac{1}{A-B}\frac{\partial A}{\partial \xi} &= \frac{F_1'(\xi)}{F_1(\xi)+F_2(\eta)}. \end{aligned} \tag{15}$$

Умножая первое из уравнений (15) на $F_1'(\xi)$, а второе на $F_2'(\eta)$ и вычитая, получим

$$\frac{\partial}{\partial \xi}[F_2'(\eta)\,A] + \frac{\partial}{\partial \eta}[F_1'(\xi)\,B] = 0. \tag{16}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} F_2'(\eta)\,A &= \frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta}, \\ F_1'(\xi)\,B &= -\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta}. \end{aligned} \tag{17}$$

Подставляя A и B из (17) в (15), получим одно уравнение для $\overline{\Phi}$

$$\frac{\partial^2 \overline{\Phi}}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{F_2'(\eta)}{F_1(\xi)+F_2(\eta)}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \xi} + \frac{F_1'(\xi)}{F_1(\xi)+F_2(\eta)}\frac{\partial \overline{\Phi}}{\partial \eta} = 0, \tag{18}$$

имеющее вид (12).

Следовательно,

$$\overline{\Phi} = \frac{F_3(\xi)+F_4(\eta)}{F_1(\xi)+F_2(\eta)}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{F_2'(\eta)}\,\frac{F_4'(\eta)[F_1(\xi)+F_2(\eta)] - F_2'(\eta)[F_3(\xi)+F_4(\eta)]}{[F_1(\xi)+F_2(\eta)]^2}, \\ B &= -\frac{1}{F_1'(\xi)}\,\frac{F_3'(\xi)[F_1(\xi)+F_2(\eta)] - F_1'(\xi)[F_3(\xi)+F_4(\eta)]}{[F_1(\xi)+F_2(\eta)]^2}, \end{aligned} \tag{20}$$

где F_1, F_2, F_3 и F_4 — произвольные функции своих аргументов.

Если заменить в (20) A на $1/A$ и B на $1/B$, то получим вид A и B, при которых y имеет вид (3). При наличии (20) x дается формулой (13), а y находится квадратурами из (1).

3. Имея A и B вида (20), при которых система (1) легко интегрируется, можем, следуя С. А. Христиановичу ([2]), ставить вопрос о приближенном интегрировании системы (1). Для этого нужно, распоряжаясь четырьмя произвольными функциями F_1, F_2, F_3 и F_4, аппроксимировать коэффициенты A и B функциями от ξ и η, имеющими вид правых частей (20).

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
1 II 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[2] Н. П. Еругин, Уч. зап. ЛГУ, в. 16 (1949). [2] С. А. Христианович, Прикладн. матем. и мех., 11, 2 (1947).