

М. К. ГАВУРИН

О СИСТЕМАХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВИДА

$$y' = Ay^2 - 2By + C$$

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 III 1952)

В настоящей заметке рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dy^i}{dt} = \sum_{j, k=1}^n a_{jk}^i y^j y^k - 2 \sum_{l=1}^n b_l^i y^l + c^i, \quad (1)$$

$$y^i(0) = \gamma^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(t — комплексный аргумент, a_{jk}^i, b_l^i, c^i — постоянные) и устанавливается, что в некоторых частных случаях эта система допускает интегрирование в конечном виде.

Введем обозначения: пусть

$$A = \{a_{jk}^i\}_{i, j, k=1}^n, \quad B = \{b_l^i\}_{i, l=1}^n, \quad C = \{c^i\}_{i=1}^n,$$

$$y = \{y^i\}_{i=1}^n, \quad y_0 = \{\gamma^i\}_{i=1}^n,$$

причем трехмерную матрицу A можно считать симметричной относительно индексов j и k . Пусть, далее, для любых векторов $x = \{x^i\}_{i=1}^n$, $z = \{z^i\}_{i=1}^n$

$$Ax = \left\{ \sum_{k=1}^n a_{jk}^i x^k \right\}_{i, j=1}^n, \quad Axz = \left\{ \sum_{j, k=1}^n a_{jk}^i x^k z^j \right\}_{i=1}^n,$$

так что Axz есть результат применения матрицы Ax к вектору z :

$$Axz = (Ax)z.$$

В силу предположенной симметрии A справедливо тождество

$$Axz = Azx \quad \text{или} \quad (Ax)z = (Az)x.$$

Axx будем обозначать также Ax^2 .

При указанных обозначениях систему (1) можно записать в виде

$$y' = Ay^2 - 2By + C, \quad y(0) = y_0. \quad (2)$$

Остановимся сначала на уравнении более простого вида:

$$y' = Ay^2, \quad y(0) = y_0. \quad (3)$$

По аналогии с обыкновенными дифференциальными уравнениями можно предполагать, что решение будет иметь вид

$$y = (1 - tAy_0)^{-1}y_0. \quad (4)$$

Однако так будет не всегда. Мы покажем, что (4) удовлетворяет (3) при выполнении дополнительного условия:

I. При любом векторе x матрицы Ay_0 и Ax коммутируют.

Из I следует тождество относительно x :

$$A[(Ay_0)x] = (Ay_0)(Ax). \quad (5)$$

Обратимся к выражению (4). Вычисляем

$$y' = (1 - tAy_0)^{-1}(Ay_0)(1 - tAy_0)^{-1} = (1 - tAy_0)^{-1}(Ay_0)y,$$

$$Ay^2 = A[(1 - tAy_0)^{-1}y_0]y.$$

Равенство $y' = Ay^2$ следует из равенства

$$(1 - tAy_0)^{-1}(Ay_0) = A[(1 - tAy_0)^{-1}y_0], \quad (6)$$

которое легко проверяется.

Прежде чем переходить к уравнению (2) в общем виде, займемся «квадратным» уравнением

$$Ay^2 - 2By + C = 0. \quad (7)$$

Чтобы пытаться найти его решение в привычной форме $y = (B \pm \sqrt{B^2 - AC})A^{-1}$, надо определить, что должно соответствовать выражению A^{-1} , которое пока прямого смысла не имеет (так как A есть трехмерная матрица).

Скажем, что вектор z_0 является обратным для матрицы A :

$$z_0 = A^{-1},$$

если матрица Az_0 есть единичная матрица: $Az_0 = 1$.

Мы будем предполагать, что

II. Матрица A имеет обратный вектор z_0 .

Сделаем, сверх того, еще следующие предположения:

III. Матрица B коммутирует со всякой матрицей вида Ax .

IV. Матрица $B^2 - AC$ имеет квадратный корень $L = \sqrt{B^2 - AC}$, коммутирующий со всякой матрицей вида Ax .

Из этих предположений следует:

а) для любого вектора x $Axz_0 = x$;

б) $B = A(Bz_0)$;

в) $L = A(Lz_0)$;

г) B и L коммутируют.

При предположениях II—IV можно утверждать, что векторы

$$y_{1,2} = (B \pm L)z_0 \quad (8)$$

удовлетворяют уравнению (7), что легко проверяется на основании а) — г).

Вернемся теперь к уравнению (2). Сделаем предположения II—IV и

V. Для любых x и z матрицы Ax и Az коммутируют.

Введем теперь векторы y_1 и y_2 , определяемые (8) и служащие корнями трехчлена $Ay^2 - 2By + C$, и примем следующие обозначения:

$$K_1 = A(y_0 - y_1), \quad K_2 = A(y_0 - y_2), \quad K = A(y_1 - y_2) = K_2 - K_1,$$

$$P = e^{tK} K_1.$$

При предположениях II—V решением уравнения (2) служит функция

$$y = (K_2 - P)^{-1} (K_2 y_1 - P y_2). \quad (9)$$

Сначала проверяются следующие вспомогательные утверждения:

- д) B, K_1, K_2, K, P коммутируют попарно;
 е) если U означает любую из матриц $K_1, K_2, K, P, (K_2 - P)^{-1}$, то при любом векторе x

$$A(Ux) = U(Ax). \quad (10)$$

Достаточно проверить это для матриц K_1 и K_2 .

Из (10) следует, что при любом векторе x

$$A(Ux)^2 = U^2 Ax^2. \quad (11)$$

Обращаясь к выражению (9), убеждаемся прежде всего в том, что выполнено начальное условие.

Далее вычисляем $P' = e^{tK} K K_1 = PK$ и

$$\begin{aligned} y' &= (K_2 - P)^{-1} PK (K_2 - P)^{-1} (K_2 y_1 - P y_2) - (K_2 - P)^{-1} PK y_2 = \\ &= (K_2 - P)^{-2} PK \{ (K_2 y_1 - P y_2) - (K_2 - P) y_2 \} = \\ &= (K_2 - P)^{-2} P K K_2 (y_1 - y_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Перейдем к вычислению правой части (2):

$$\begin{aligned} Ay^2 - 2By + C &= A[(K_2 - P)^{-1} (K_2 y_1 - P y_2)]^2 - \\ &\quad - 2B(K_2 - P)^{-1} (K_2 y_1 - P y_2) + C = \\ &= (K_2 - P)^{-2} \{ A(K_2 y_1 - P y_2)^2 - 2B(K_2 - P)(K_2 y_1 - P y_2) + (K_2 - P)^2 C \} = \\ &= (K_2 - P)^{-2} \{ [A(K_2 y_1)^2 - 2BK_2^2 y_1 + K_2^2 C] + [A(P y_2^2) - 2BP^2 y_2 + P^2 C] - \\ &\quad - 2[A(K_2 y_1)(P y_2) - BK_2 P(y_1 + y_2) + K_2 PC] \}. \end{aligned}$$

Подсчитаем каждое из слагаемых в правой части:

$$A(K_2 y_1)^2 - 2BK_2^2 y_1 + K_2^2 C = K_2^2 [Ay_1^2 - 2By_1 + C] = 0,$$

$$A(P y_2)^2 - 2BP^2 y_2 + P^2 C = P^2 [Ay_2^2 - 2By_2 + C] = 0,$$

$$\begin{aligned} A(K_2 y_1)(P y_2) - BK_2 P(y_1 + y_2) + K_2 PC &= \\ &= K_2 P [Ay_1 y_2 - B(y_1 + y_2) C] = \\ &= -1/2 K_2 P [A(y_1 - y_2)^2 - (Ay_1^2 - 2By_1 + C) - (Ay_2^2 - 2By_2 + C)] = \\ &= -1/2 K_2 P A (y_1 - y_2)^2 = -1/2 K_2 PK (y_1 - y_2). \end{aligned}$$

Мы пользовались здесь равенством $A(K_2 y_1)(P y_2) = K_2 P A y_1 y_2$, получающимся аналогично (12).

Таким образом,

$$A y^2 - 2B y + C = (K_2 - P)^{-2} K_2 P (y_1 - y_2) = y',$$

что и требовалось доказать.

Из формы (9) легко находятся особые точки u и уясняется их характер.

Остановимся в нескольких словах на алгебраической стороне дела. Пусть \mathfrak{M} есть множество квадратных матриц вида $U = Ax$. Тогда условие II означает, что $I \in \mathfrak{M}$. Как нетрудно показать, условие V равносильно тому, что \mathfrak{M} есть полугруппа, а условия III и IV — тому, что $B \in \mathfrak{M}$ и что \mathfrak{M} содержит $\sqrt{B^2 - AC}$.

Разумеется, все сказанное остается в силе, если уравнение (2) рассматривать не в евклидовом пространстве, а в пространствах более общего вида — например, банаховых.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
30 I 1952