Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Р. Э. ВИНОГРАД

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СМЫСЛЕ ЛЯПУНОВА РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 12 III 1952)

Задача об устойчивости решений уравнения*

$$y' = A(t)y \tag{1}$$

(y — n-мерный вектор, $A(t)$ — непрерывная или кусочно-непрерывная на полуоси $0 \leqslant t < \infty$ действительная матрица) в частном случае $A(t) \equiv \text{const} = A$ решается изучением собственных чисел и элементарных делителей матрицы A. Этот путь неприемлем для переменной $A(t)$, как показывает пример (см. также ([2]))

$$x_1' = (-1 - 9\cos^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t)\,x_1 + (12\cos^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t)\,x_2,$$

$$x_2' = (-12\sin^2 6t + 9\sin 6t\cos 6t)\,x_1 - (1 + 9\sin^2 6t + 12\sin 6t\cos 6t)\,x_2,$$

ибо собственные числа матрицы правой части суть -1 и -10, т. е. не зависят от t, действительны и отрицательны, а между тем система неустойчива, имея фундаментальную систему решений

$$\begin{aligned} x_{11} &= e^{2t}(\cos 6t + 2\sin 6t) \\ x_{21} &= e^{2t}(\cos 6t - \sin 6t); \end{aligned} \quad (\mathrm{I}) \qquad \begin{aligned} x_{21} &= e^{-13t}(\sin 6t - 2\cos 6t), \\ x_{22} &= e^{-13t}(2\sin 6t + \cos 6t); \end{aligned} \quad (\mathrm{II})$$

при $t \to -\infty$ неограничены все решения, кроме пропорциональных (I), а при $t \to +\infty$ — все, кроме пропорциональных (II).

Однако с помощью методов, в основном сводящихся ко второму методу Ляпунова ([3]), Важевский ([4]) показал, что ряд выводов об устойчивости и неустойчивости (1) можно сделать, изучая собственные числа не $A(t)$, а $B(t) = {}^1/_2\,[A(t) + A^*(t)]$. Винтнер и Антосиевич ([5,6]) дают лишь неполное повторение результатов Важевского.

В настоящей заметке изучается случай, не охваченный вышеупомянутыми исследованиями. С помощью нового метода, составной частью которого является приведение уравнения (1) к специальному виду (4), выводится критерий неустойчивости (1) и обобщение его на некоторые классы нелинейных уравнений.

---

* Известно ([1]), что все решения уравнения (1) одновременно устойчивы или нет, поэтому для краткости будем говорить об устойчивости самого уравнения (1), подразумевая устойчивость всех решений.

1. Пусть $\Lambda(t)$ и $-\mathrm{M}(t)$ обозначают, соответственно, наибольшее и наименьшее (в каждой точке t) собственные числа симметрического оператора $B(t) = {}^1/_2\,[A(t) + A^*(t)]$. Можно показать, что в случае ограниченности сверху одного из интегралов $\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau$ и $\int_0^t \mathrm{M}(\tau)\,d\tau$ вопрос об устойчивости (1) полностью решается совместным применением формулы Лиувилля и теоремы Важевского ([4]), а именно: если $\sup\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau < \infty$, то (1) устойчиво, а если $\sup\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau = \infty$, но $\sup\int_0^t \mathrm{M}(\tau)\,d\tau < \infty$, то (1) неустойчиво; из формулы Лиувилля вытекает также неустойчивость (1), когда $\sup\int_0^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau)\,d\tau = \infty$ $\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}(t)\text{—след}\right.$ матрицы $\left.A(t)\right)$. Изучению будет подвергнут остающийся сомнительным случай

$$\sup\int_0^t \Lambda(\tau)\,d\tau = \sup\int_0^t \mathrm{M}(\tau)\,d\tau = \infty, \quad \sup\int_0^t \sum_{i=1}^n a_{ii}(\tau)\,d\tau < \infty. \tag{2}$$

При этом обнаруживается, что, ограничиваясь только такими сведениями о собственных числах оператора $B(t)$, ничего нельзя сказать об устойчивости (1); поэтому нужно вводить дополнительные условия, из которых одно из наиболее общих формулируется так:

Пусть некоторые из собственных чисел $B(t)$ *обозначены через* $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t), \ldots, \lambda_l(t)$, *а остальные — через* $-\mu_1(t), -\mu_2(t), \ldots, -\mu_m(t)$. *Положим*

$$\Lambda(t) = \max_{1\leqslant i\leqslant l}[\lambda_i(t)], \qquad \mathrm{M}(t) = \max_{1\leqslant j\leqslant m}[\mu_j(t)],$$

$$\lambda(t) = \min_{1\leqslant i\leqslant l}[\lambda_i(t)], \qquad \mu(t) = \min_{1\leqslant j\leqslant m}[\mu_j(t)].$$

Требуется, чтобы было

$$\lambda(t) > 0, \quad \mathrm{M}(t) > 0, \quad \lambda(t) + \mu(t) > 0 \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{A}$$

Условие (A) выполнено, в частности, если все $\lambda_i(t) > 0$ и все $-\mu_j(t) < 0$.

Запишем (1) в виде

$$y' = [B(t) + C_1(t)]\,y, \tag{3}$$

где $B(t) = {}^1/_2\,[A(t) + A^*(t)]$ и $C_1(t) = {}^1/_2\,[A(t) - A^*(t)]$. Матрица $B(t)$ симметрична, значит, при каждом t существует такая ортогональная матрица $U(t)$, что $D(t) = U^{-1}(t)\,B(t)\,U(t)$ — диагональная матрица. Если $U(t)$ может быть выбрана непрерывно (или кусочно-непрерывно) дифференцируемой, то замена $y = U(t)\,x$ приводит (3) к виду

$$x' = [D(t) + C(t)]\,x, \tag{4}$$

причем $D(t)$ — диагональная матрица, а матрица $C_1(t) = U^{-1}(t)\,C_1(t)\,U(t) - U^{-1}(t)\,dU(t)/dt$ всегда оказывается кососимметрической.

Одним из достаточных условий непрерывности $U(t)$ и $U'(t) = dU(t)/dt$ является, например, такое:

Пусть $B(t)$ и $B'(t)$ непрерывны, а собственные числа $B(t)$ различны при всех t. Тогда $U(t)$ и $U'(t)$ существуют и непрерывны.

Другим достаточным условием является аналитичность $B(t)$ (т. е. ее элементов) при $0 \leqslant t < \infty$. В этом случае $U(t)$ может быть всегда выбрана аналитической.

Матрица $U(t)$ состоит из выписанных в столбцы нормированных собственных векторов оператора $B(t)$, чем определяется процесс ее вычисления. Ввиду ортогональности $U(t)$ будет $\|y\| = \|U(t)x\| = \|x\|$, так что в смысле устойчивости (3) и (4) совершенно эквивалентны.

Специальный вид (4) позволяет доказать следующую теорему:

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (2) *и* (A). *Положим*

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{\mathrm{M}(t)} = \Gamma_0^2 \quad \text{и} \quad \varlimsup_{t\to\infty} \frac{\|C(t)\|}{\lambda(t)+\mu(t)} = \Delta_0.$$

Уравнение (4) *неустойчиво, если* $\Delta_0 < \dfrac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0^2}$. *Когда* $\Gamma_0 > 1$, *то неустойчивость наблюдается и при более слабом условии* $\Delta_0 < {}^1/_2$, *а если, начиная с некоторого t, будет* $\dfrac{\|C(t)\|}{\lambda(t)+\mu(t)} \leqslant {}^1/_2$, *то и при условии* $\Delta_0 = {}^1/_2$.

(Под нормой линейного оператора R с матрицей $\{r_{ij}\}$ можно подразумевать любую из величин $\sum\limits_{i,j} |r_{ij}|$, $\sqrt{\sum\limits_{i,j} r_{ij}^2}$, $\max\limits_{\|x\|=1} \|Rx\|$; последняя наиболее экономна.)

Существуют примеры систем вида (4), для которых условия теоремы оказываются точными: оставляя неизменной $D(t)$ и меняя $C(t)$, можно для любого $\Delta_0 \geqslant \dfrac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0^2}$ указать такие $C(t)$, что $\varlimsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{\|C(t)\|}{\lambda(t)+\mu(t)} = \Delta_0$ и (4) устойчиво, тогда как при всех $C(t)$, для которых $\Delta_0 < \dfrac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0^2}$, имеет место неустойчивость. Теорему 1 нельзя употреблять, если $\varliminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\lambda(t)}{\mathrm{M}(t)} = 0$. В этом случае можно еще попытаться иначе разбить элементы $D(t)$ на группы $\lambda_i(t)$ и $-\mu_j(t)$. Если это невыполнимо (как, например, для $n = 2$), то может быть использована более сложная теорема 2.

Теорема 2. *Если существуют такие две функции $\varepsilon_1(t)$ и $\varepsilon_2(t)$, что $\alpha(t) = \lambda(t) - \varepsilon_1(t)$ и $\beta(t) = \mathrm{M}(t) + \varepsilon_2(t)$ суть положительные и непрерывно дифференцируемые функции и что $\varepsilon(t) = \min[\varepsilon_1(t); \varepsilon_2(t)]$ удовлетворяет условию* $\sup \int\limits_0^t \varepsilon(\tau)\, d\tau = \infty$, *то для неустойчивости* (4) *достаточно, чтобы соблюдалось неравенство (аргумент t опускаем)*

$$\|C\| \leqslant \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\alpha+\beta}(\lambda+\mu) + \frac{1}{2}\,\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{(\alpha+\beta)\sqrt{\alpha\beta}}.$$

Условие $\varliminf\limits_{t\to\infty} \dfrac{\lambda(t)}{\mathrm{M}(t)} = 0$ в теореме не используется, так что она может быть применена и в условии теоремы 1, но, как правило, это не дает более выгодного результата.

2. Теорема 1 допускает обобщение на определенный класс нелинейных уравнений. Рассмотрим уравнение

$$x' = D(t)x + F(t, x), \tag{5}$$

где $D(t)$ — диагональная матрица, элементы которой удовлетворяют условию (A), а $F(t, x)$ — вообще нелинейный непрерывный оператор, обеспечивающий существование и единственность решений (5) и такой, что

$$\| F(t, x) \| \leqslant G(t) \| x \|, \tag{6}$$

$$|(x, F(t, x))| \leqslant g(t) \| x \|^2, \tag{7}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ непрерывны; скобки в (7) — знак скалярного произведения (существование $g(t)$ следует из (6), но так как $g(t) \leqslant G(t)$, то использование (7) приносит известную экономию). Предполагается, что $D(t)$ и $F(t, x)$ определены на полуоси $0 \leqslant t < \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $\varliminf_{t\to\infty} \frac{\lambda(t)}{\mathrm{M}(t)} = \Gamma_0^2$ *и* $\varlimsup_{t\to\infty} \frac{G(t)}{\lambda(t)+\mu(t)} = \Delta_0$.

Тривиальное решение (5) *неустойчиво, если*: 1) $\Delta_0 < \frac{\Gamma_0}{1+\Gamma_0^2}$ *и существует такое* $\xi > 0$, *что* 2) $\sup \int\limits_0^t [(\delta_0 - \xi)\mathrm{M}(\tau) - g(\tau)]\, d\tau = \infty$, *где* $\delta_0 = \frac{\Gamma_0^2 - \gamma_0^2}{1+\gamma_0^2}$, *а* γ_0 *есть меньший корень квадратного уравнения* $\frac{\gamma}{1+\gamma^2} = \Delta_0$.

Когда $\Gamma_0 > 1$, *то условие* 1) *можно заменить условием* $\Delta_0 < {}^1/_2$, *а если, начиная с некоторого* t, *будет* $\frac{G(t)}{\lambda(t)+\mu(t)} \leqslant {}^1/_2$, *то и условием* $\Delta_0 = {}^1/_2$.

Характер неустойчивости при этом таков: в любой окрестности тривиального решения при любом t_0 *имеется* n*-мерное множество, из точек которого выходят неограниченные при* $t_0 \leqslant t < \infty$ *решения.*

Эту теорему можно прилагать к уравнению $x' = f(t, x)$, переписывая его в виде $x' = D(t)x + [f(t, x) - D(t)x]$ и подбирая $D(t)$ так, чтобы для $D(t)$ и $F(t, x) = f(t, x) - D(t)x$ выполнялись условия 1) и 2). Такой прием можно употреблять, в частности, для линейного уравнения $x' = A(t)x$, если приведение его к виду (4) трудно или нельзя выполнить. Однако, если приведение возможно, то теорема 3 дает наиболее точный результат, превращаясь в теорему 1.

Институт математики и механики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Б. П. Демидович, Матем. сборн., нов. сер., **28**, в. 3 (1951). [2] К. П. Персидский, Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, диссертация, 1946. [3] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, 1935. [4] T. Wazewzki, Studia Math., **10**, 48 (1948). [5] A. Wintner, Quart. Appl. Math., **8**, № 1, 102 (1950). [6] H. A. Antosiewicz, ibid., **9**, № 3, 317 (1951).