Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIV, № 2

МАТЕМАТИКА

Д. Л. БЕРМАН

К ВОПРОСУ ОБ ОЦЕНКЕ ПРОИЗВОДНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО ПОЛИНОМА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 13 XII 1951)

1°. Обозначим через $\{l_k(x)\}_{k=1}^{n}$ совокупность фундаментальных полиномов Лагранжа, построенных для n-й строчки матрицы узлов

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, \ x_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, \ x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ +1 \geqslant x_1^{(n)} > x_2^{(n)} > \cdots > x_n^{(n)} \geqslant -1 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \end{array} \tag{1}$$

В моей заметке (1) доказана следующая теорема:

Пусть n-я строчка матрицы узлов (1) *составлена из корней полинома* $P_n(x) = (1 - x^2)\, v_n(x)$, $v_n(x) = \sin(n-1)\theta / \sin\theta$, $x = \cos\theta$. *Тогда для любого* $x \in [-1, 1]$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{dl_k^{(n)}(x)}{dx} \right| < cn^2, \tag{2}$$

где c — абсолютная константа.

Из этой теоремы следует предложение:

Теорема 1. *Если алгебраический полином $R(x)$ степени не выше $n-1$ в точках*

$$x_k = \cos\frac{(k-1)\pi}{n-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

удовлетворяет неравенствам

$$|R(x_k)| \leqslant 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

то во всех точках сегмента $[-1, 1]$ *производная этого полинома $R'(x)$ удовлетворяет неравенству*:

$$|R'(x)| \leqslant c_1 (n-1)^2, \tag{5}$$

где c_1 — абсолютная константа.

Действительно, так как $R(x)$ — полином степени $n-1$, то $R'(x) = \sum_{k=1}^{n} R(x_k)\, l'_k(x)$, где $\{l_k^{(n)}(x)\}_{k=1}^{n}$ — фундаментальные полиномы Лагранжа системы точек (3). Значит, из неравенств (4) следует, что

$$|R'(x)| \leqslant \max_{x \in [-1,1]} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{dl_k(x)}{dx} \right|, \quad x \in [-1, 1]. \tag{6}$$

Из неравенств (2) и (6) следует, что во всех точках интервала $[-1, 1]$ выполняется (5).

Теорему 1 уместно сравнить с известной теоремой А. А. Маркова, утверждающей, что если полином $R(x)$ степени не выше $n-1$ во всех точках интервала $[-1, 1]$ удовлетворяет неравенству

$$|R(x)| \leqslant 1, \tag{7}$$

то его производная $R'(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|R'(x)| \leqslant (n-1)^2, \quad x \in [-1, 1]. \tag{8}$$

Очевидно, что условие (4) менее жестко, чем условие (7), а неравенство (5) отличается от неравенства (8) лишь константой.

Следствие. *Если алгебраический полином $R(x)$ степени не выше $n-1$ в точках $x_k = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cos \frac{k-1}{n-1} \pi$, $k = 1, 2, \ldots, n$ $(b > a)$, удовлетворяет неравенствам $|R(x_k)| \leqslant M$, то во всех точках сегмента $[a, b]$ его производная $R'(x)$ удовлетворяет неравенству $|R'(x)| \leqslant \frac{2Mc_1}{b-a}(n-1)^2$, где c_1 — абсолютная константа теоремы* 1.

Замечание 1. Пусть Π_{n-1} обозначает множество всех многочленов $R(x)$ степени $n-1$, для которых $\left| R\left(\cos \frac{(k-1)\pi}{n-1}\right)\right| \leqslant 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Положим $M_{n-1} = \sup\limits_{R \in \Pi_{n-1}} \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |R'(x)|$. Из неравенства (6) следует, что

$$M_{k-1} \leqslant \max_{x \in [-1,1]} \sum_{k=1}^{n} |l'_k(x)|. \tag{9}$$

Пусть $\sum\limits_{k=1}^{n} |l'_k(x)|$ достигает в интервале $[-1, 1]$ максимума при $x = x_0$. Тогда для полинома $\bar{R}(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{sign} l'_k(x_0)\, l_k(x)$ имеет место равенство

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\bar{R}'(x)| = \max_{x \in [-1,1]} \sum_{k=1}^{n} |l'_k(x)|. \tag{10}$$

Так как $\bar{R} \in \Pi_{n-1}$, то из соотношений (9) и (10) следует, что $M_{k-1} = \max\limits_{-1 \leqslant x \leqslant 1} \sum\limits_{k=1}^{n} |l'_k(x)|$.

Замечание 2. Если полином $R(x)$ степени $(n-1)$ удовлетворяет неравенствам (4), то для k-й производной полинома $R^{(k)}(x)$ имеет место неравенство $|R^{(k)}(x)| \leqslant c_k T_{n-1}^{(k)}(1)$, $x \in [-1, 1]$, $T_{n-1}(x) = \cos(n-1) \arccos x$, где константа c_k зависит лишь от k.

Действительно, так как $R^{(k)}(x) = [R'(x)]^{(k-1)}$, то из неравенства В. А. Маркова ([2], [3]) следует, что

$$|R^{(k)}(x)| \leqslant T_{n-2}^{(k-1)}(1) \max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |R'(x)|, \quad x \in [-1, 1]. \tag{11}$$

Из теоремы 1 и (11) следует, что $|R^{(k)}(x)| \leqslant c_1 (n-1)^2 T_{n-2}^{(k-1)}(1)$, $x \in [-1, 1]$. Легко доказать, что $c_1 (n-1)^2 T_{n-2}^{(k-1)}(1) < c_k T_{n-1}^{(k)}(1)$, где константа c_k зависит лишь от k, откуда и следует замечание 2.

2°. Пусть R — k-мерное евклидово пространство, $X(x_1, x_2, \ldots, x_k) \in R$. Обозначим через $C^{(k)}$ пространство непрерывных функций от k переменных, определенных в кубе K: $|x_i| \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Норма $f \in C^{(k)}$ определяется равенством $\|f\|_{C^{(k)}} = \max\limits_{X \in K} |f(X)|$. Будем говорить, что линейная операция $U(f, X)$ из $C^{(k)}$ в $C^{(k)}$ является s-кратной линейной полиномиальной операцией дифференцирования порядка $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, если: 1) для любой $f \in C^{(k)}$ $U(f, X)$ — алгебраический полином степени не выше $n_1, n_2, \ldots, n_k$, соответственно, относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_k$; 2) для любого полинома $P(X)$ степени не выше $n_1, n_2, \ldots, n_k$ относительно $x_1, x_2, \ldots, x_k$ имеет место тождество

$$U(P, X) = \frac{\partial^s P}{\partial x_1^{\sigma_1} \ldots \partial x_k^{\sigma_k}} \quad \left(\sum_{j=1}^{k} \sigma_j = s\right). \tag{12}$$

Теорема 2. *Норма s-кратной линейной полиномиальной операции дифференцирования порядка $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$, переводящей $C^{(k)}$ в $C^{(k)}$, удовлетворяет неравенству* $\|U\|_{C^{(k)}} \geqslant \prod\limits_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(\sigma_j)}(1)$.

Доказательство. Пусть $P(X) = \prod\limits_{j=1}^{k} T_{n_j}(x_j)$. Согласно (12)

$$U(P, X) = \prod_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(\sigma_j)}(x_j). \tag{13}$$

Так как $\|P\|_{C^{(k)}} = 1$, то

$$\|U(P, X)\|_{C^{(k)}} \leqslant \|U\|_{C^{(k)}} \|P\|_{C^{(k)}} = \|U\|_{C^{(k)}}. \tag{14}$$

Из равенства (13) следует, что

$$\|U(P, X)\|_{C^{(k)}} = \left\| \prod_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(\sigma_j)}(x_j) \right\|_{C^{(k)}} \geqslant \prod_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(\sigma_j)}(1). \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует теорема 2.

Следствие 1. *Норма s-кратной линейной полиномиальной операции дифференцирования порядка $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ удовлетворяет неравенству* $\|U\|_{C^{(k)}} \geqslant \prod\limits_{i=1}^{k} \dfrac{n_i^2(n_i^2-1)\ldots[n_i^2-(\sigma_i-1)^2]}{(2\sigma_i-1)!!}$.

Это следствие непосредственно следует из равенства $T_n^{(k)}(1) = \dfrac{n^2(n^2-1)\ldots[n^2-(k-1)^2]}{(2k-1)!!}$.

Следствие 2. *Для любой системы узлов многомерного интерполирования* [4] $\{X_j\}_{j=1}^{N}$, $N = \prod\limits_{j=1}^{k}(n_j+1)$, *из единичного куба K имеет место неравенство*

$$\max_{X \in K} \sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial^s l_j(X)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \ldots \partial x_k^{\sigma_k}} \right| \geqslant \prod_{j=1}^{k} T_{n_j}^{(\sigma_j)}(1), \tag{16}$$

где $\{l_j(X)\}$ — фундаментальные полиномы Лагранжа многомерного интерполирования.

Доказательство. Из определения системы узлов интерполирования следует, что операция

$$U(f, X) = \sum_{j=1}^{N} f(X_j) \frac{\partial^s l_j(X)}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \ldots \partial x_k^{\sigma_k}} \tag{17}$$

является s-кратной линейной полиномиальной операцией дифференцирования порядка $\bar{n}(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ из $C^{(k)}$ в $C^{(k)}$. Легко убедиться, что норма операции (17) равна левой части (16), откуда и вытекает (16).

Теорема 2 и следствия 1 и 2 являются обобщениями на многомерный случай результатов моей заметки ([1]).

3°. В настоящем пункте мы докажем, что неравенство (16) является точным относительно $n_1, n_2, \ldots, n_k$ в отношении порядка.

Теорема 3. *Пусть i-я компонента точки* $X(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ *принимает значения* $x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_{n_i}^{(i)}$, *где* $x_j^{(i)} = \cos(j\pi / n_i)$, $j = 0, 1, 2, \ldots, n_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. *Тогда для системы интерполяционных узлов порядка* $N = \prod_{j=1}^{k}(n_j + 1)$

$$\{(x_{j_1}^{(1)}, x_{j_2}^{(2)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})\}, \quad j_s = 0, 1, 2, \ldots, n_s, \quad s = 1, 2, \ldots, k, \tag{18}$$

имеет место неравенство:

$$\sum_{j=1}^{N} \left| \frac{\partial^k l_j(X)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} \right| \leqslant C \prod_{j=1}^{k} n_j^2, \quad X \in K. \tag{19}$$

Доказательство. В случае системы узлов (18) левая часть (19) принимает вид:

$$\sum_{j_k=1}^{n_k} \cdots \sum_{j_1=1}^{n_1} \left| \prod_{s=1}^{k} l'_{j_s}(x_s) \right|. \tag{20}$$

Из (2) и (20) следует, что

$$\sum_{j_k=0}^{n_k} \cdots \sum_{j_1=0}^{n_1} \left| \frac{\partial^k \prod_{s=1}^{k} l_{j_s}(x_s)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} \right| < C \prod_{j=1}^{k} n_j^2, \text{ где } C \text{ — абсолютная константа.}$$

Теорема 4. *Если алгебраический полином от k переменных* $P(x_1, \ldots, x_k)$, *степени не выше* $n_1, n_2, \ldots, n_k$ *относительно* $x_1, x_2, \ldots, x_k$, *соответственно, удовлетворяет в точках* (18) *неравенствам*

$$|P(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)})| \leqslant 1, \quad j_s = 0, 1, 2, \ldots, n_s, \quad s = 1, 2, \ldots, k, \tag{21}$$

то во всех точках $X \in K$ *выполняется неравенство*

$$\left| \frac{\partial^k P(x_1, x_2, \ldots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} \right| \leqslant C \prod_{j=1}^{k} n_j^2, \text{ где } C \text{ — абсолютная константа.}$$

Действительно, так как $P(X)$ степени не выше $n_1, \ldots, n_k$, то

$$\frac{\partial^k P}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} = \sum_{j_k=0}^{n_k} \cdots \sum_{j_1=0}^{n_1} P(x_{j_1}^{(1)}, \ldots, x_{j_k}^{(k)}) \prod_{s=1}^{k} l'_{j_s}(x_s).$$

Из неравенств (21) следует, что

$$\left| \frac{\partial^k P}{\partial x_1 \ldots \partial x_k} \right| \leqslant \sum_{j_k=0}^{n_k} \cdots \sum_{j_1=0}^{n_1} \prod_{s=1}^{k} | l'_{j_s}(x_s) |. \tag{22}$$

Из (22) и теоремы 3 следует теорема 4.

Поступило
4 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Л. Берман, ДАН, 73, № 2 (1950). [2] В. А. Марков, О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке, СПб, 1892. [3] С. Н. Бернштейн, Тр. Ленингр. индустриальн. ин-та, № 5, раздел физ.-мат., в. 1, 8 (1938). [4] С. Н. Бернштейн, ДАН, 59, № 5 (1948).