Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

ТЕХНИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. Н. ДЕРЮГИН

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКОВ В ДИСКЕ, ВРАЩАЮЩЕМСЯ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОТОКЕ, И ТОРМОЖЕНИЕ

(Представлено академиком Б. А. Введенским 23 XI 1951)

1. Ранее (1) * были получены общие выражения в виде квадратур для распределения вихревых токов в диске, вращающемся относительно пронизывающего его магнитного поля, и для тормозящего момента, действующего со стороны магнитного поля на диск. В случае, когда однородное магнитное поле пронизывает прямоугольную площадку диска F, ограниченную дугами $A_{1\,\mathrm{I}}\,A_{2\,\mathrm{I}}$ и $A_{1\,\mathrm{II}}\,A_{2\,\mathrm{II}}$ и радиальными отрезками $A_{1\,\mathrm{I}}A_{1\,\mathrm{II}}$ и $A_{2\,\mathrm{II}}A_{2\,\mathrm{I}}$ (рис. 1), указанные квадратуры аналитически интегрируются, так что могут быть получены замкнутые формулы для вычисления токов и момента.

2. Вихри электрического поля в этом случае возникают лишь на торцевых отрезках $A_{1\,\mathrm{I}}A_{1\,\mathrm{II}}$ и $A_{2\,\mathrm{II}}A_{2\,\mathrm{I}}$, и при вычислении функции потока интегрирование по замкнутой, вообще говоря, линии вихрей L сводится к интегрированию по указанным отрезкам, на которые эта линия распадается. Таким образом, согласно (15) из (1), функция потока электрического поля в рассматриваемом случае будет

$$v(r, \varphi) = \omega B \left[\int\limits_{a_{\mathrm{I}}}^{a_{\mathrm{II}}} a v_0(a, \alpha_0, r, \varphi)\, da - \int\limits_{a_{\mathrm{I}}}^{a_{\mathrm{II}}} a v_0(a_1, -\alpha_0, r, \varphi)\, da \right]. \quad (1)$$

Взяв выражение для $v_0(a, \alpha, r, \varphi)$ из (12) в (1) и введя обозначение

$$\Pi(a, r, \theta) = \int a \ln \frac{1}{a^2} \, \frac{1 - 2ar\cos\theta + a^2r^2}{a^2 - 2ar\cos\theta + r^2}\, da, \quad (2)$$

где $\theta = \varphi - \alpha$, получаем (1) в виде

$$v(r, \varphi) = \frac{\omega B}{4\pi} \Big[\Pi(\theta = \varphi - \alpha_0) - \Pi(\theta = \varphi + \alpha_0) \Big]_{a=a_{\mathrm{I}}}^{a=a_{\mathrm{II}}}. \quad (3)$$

Вычисляя неопределенный интеграл (2), найдем:

$$\Pi(a, r, \theta) = a\left(r - \frac{1}{r}\right)\cos\theta +$$
$$+ \frac{1}{2}a^2\left[1 - 2\ln a + \ln(1 - 2ar\cos\theta + a^2r^2) - \ln(a^2 - 2ar\cos\theta + r^2)\right] +$$
$$+ \left[r^2\ln(a^2 - 2ar\cos\theta + r^2) - \frac{1}{r^2}\ln(1 - 2ar\cos\theta + a^2r^2) + 2\,\frac{\ln r}{r^2}\right]\frac{\cos 2\theta}{2} +$$
$$+ \left[r^2 \operatorname{arctg}\frac{r\sin\theta}{a - r\cos\theta} - \frac{1}{r^2}\operatorname{arc\,tg}\frac{\sin\theta}{ar - \cos\theta}\right]\sin 2\theta. \quad (4)$$

---

* В настоящей заметке сохраняются все обозначения и условия, принятые в (1).

3. Согласно (3) и (4) в центре диска функция потока равна нулю, и ток, протекающий между любой точкой $P(r, \varphi)$ и центром диска, который мы будем называть просто током в точке $P(r, \varphi)$, выражается как

$$I = \frac{b\gamma\omega B}{4\pi}\left[\Pi(\theta = \varphi - \alpha_0) - \Pi(\theta = \varphi + \alpha_0)\right]_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}. \qquad (5)$$

Ток I положителен по одну сторону диаметра D_1D_2, отрицателен по другую его сторону, равен нулю на этом диаметре и на окружности диска и достигает максимального и минимального значений в симметричных точках P_{m1} и P_{m2}, лежащих на отрезках $A_{1\,\rm I}A_{1\,\rm II}$ и $A_{2\,\rm I}A_{2\,\rm II}$.

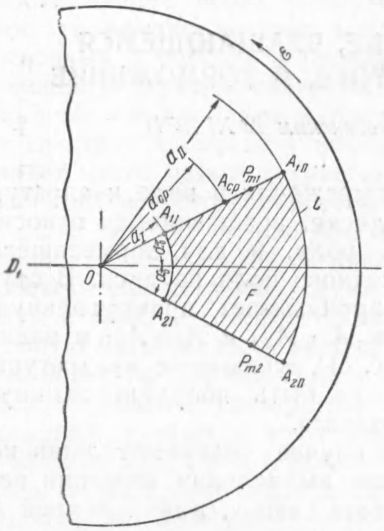

Рис. 1

4. Для вычисления тормозящего момента может быть предложен приближенный метод, основанный на определении рассеиваемой в диске мощности по приближенной формуле $W = 2I_{\rm cp}\mathcal{E}_0$, где $I_{\rm cp}$ — ток в средней точке $A_{\rm cp}(a_{\rm cp}, \alpha_0)$ торца $A_{1\,\rm II}A_{1\,\rm I}$, а $\mathcal{E}_0$ — эдс, действующая в трубках тока, целиком охватывающих этот торец. Согласно этому методу тормозящий момент определяется по формуле

$$M = b\gamma\omega B^2\,\frac{a_{\rm II}^2 - a_{\rm I}^2}{4\pi}\left[\Pi\begin{pmatrix}\theta = 0\\ r = a_{\rm cp}\end{pmatrix} - \right.$$
$$\left. - \Pi\begin{pmatrix}\theta = 2\alpha_0\\ r = a_{\rm cp}\end{pmatrix}\right]_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}. \qquad (6)$$

Неточность метода состоит в том, что, во-первых, в тех трубках тока, которые пересекают линию вихрей $A_{1\,\rm I}A_{1\,\rm II}$, действует эдс, меньшая, чем $\mathcal{E}_0$, и, во-вторых, общий ток, протекающий в верхней половине диска, равный току в точке P_{m1}, несколько превышает $I_{\rm cp}$. Однако указанные ошибки всегда компенсируют друг друга, и тем полнее, чем короче отрезок линии вихрей $A_{1\,\rm I}A_{1\,\rm II}$. Сравнение с точной формулой (17), приведенной ниже, показало, что в наиболее неблагоприятном случае, когда длина указанного отрезка равна радиусу диска, относительная ошибка при вычислении момента по формуле (6) составляет $^1/_5$.

5. Формулы (5) и (6) могут быть обобщены на случай магнитной системы, состоящей из n отдельных симметрично расположенных однородных прямоугольных магнитных потоков. В этом случае функция потока электрического поля будет

$$v(r, \varphi) = \frac{\omega B}{4\pi}\sum_{i=1}^{2n} k_i\,\Pi(\theta = \varphi - \alpha_i)\Big|_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}, \qquad (7)$$

где α_i суть углы между торцами магнитных потоков $A_{i\,\rm I}A_{i\,\rm II}$ и начальным лучом $\varphi = 0$, а k_i — коэффициенты, учитывающие знаки. Если для передних торцов северных и задних торцов южных полюсов взять $k_i = +1$, то для задних торцов северных и передних торцов южных полюсов следует брать $k_i = -1$. Ток в точке $P(r, \varphi)$ будет

$$I(r, \varphi) = \frac{b\gamma\omega B}{4\pi} \sum_{i=1}^{2n} k_i \Pi(\theta = \varphi - \alpha_i)\Big|_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}, \quad (8)$$

а тормозящий момент определяется по приближенной формуле

$$M = nb\gamma\omega B^2 (a_{\rm II}^2 - a_{\rm I}^2)\frac{1}{4\pi} \times$$

$$\times \sum_{i=1}^{2n} k_i \Pi \begin{pmatrix} \theta = \alpha_1 - \alpha_i \\ r = a_{\rm cp} \end{pmatrix}\Bigg|_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}. \quad (9)$$

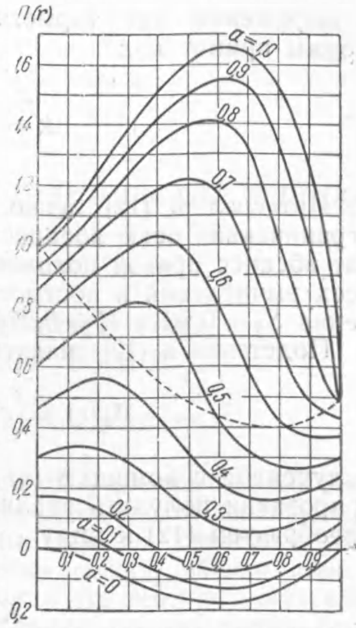

Рис. 2

6. Выведенные выше формулы станут удобными для инженерного расчета, если громоздкая функция $\Pi(a, r, \theta)$ будет табулирована. При табулировании член $\ln r / r^2$, который стремится к бесконечности при стремлении r к нулю, следует опустить, так как он не зависит от a и всегда выпадает при подстановке $\Pi(a, r, \theta)\big|_{a=a_{\rm I}}^{a=a_{\rm II}}$, входящей во все расчетные формулы. Вычисленные таким образом графики функции $\Pi(a, r, \theta)$ для $\theta = 0$ представлены на рис. 2. Пунктиром показана кривая $\Pi(r)$ для $\theta = \pi$ и $a = 1$. Кривая для $\theta = \pi$ и $a = 0$ совпадает с кривой для $\theta = 0$ и $a = 0$.

7. В заключение рассмотрим случай, когда однородное магнитное поле пронизывает половину диска, ограниченную диаметром D_1D_2. В этом случае $a_{\rm I} = 0$, $a_{\rm II} = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = \pi$, и ток в точках, лежащих на линии вихрей D_1D_2, будет

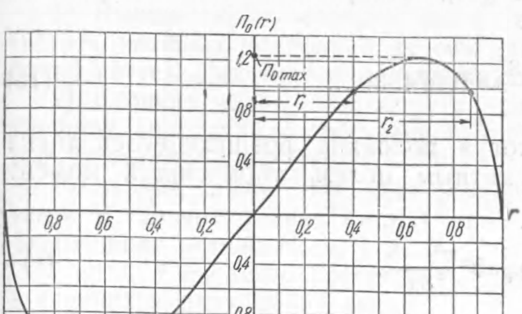

Рис. 3

$$I = \frac{b\gamma\omega B}{4\pi}\Pi_0(r), \quad (10)$$

где

$$\Pi_0(r) = [\Pi(\theta = 0) -$$

$$- \Pi(\theta = \pi)]_{a=0}^{a=1}. \quad (11)$$

На рис. 3 показан полученный для этого случая из кривых рис. 2 график функции $\Pi_0(r)$, дающий распределение тока вдоль линии вихрей. С помощью этого графика тормозящий момент может быть определен графо-аналитически. В элементарной трубке тока $dI = \frac{b\gamma\omega B}{4\pi} d\Pi_0$, которая на расстояниях r_1 и r_2 от центра диска дважды пересекает линию вихрей, действует эдс $\mathscr{E} = \frac{\omega B}{2}(r_2^2 - r_1^2)$ и рассеивается мощность $dW = \mathscr{E} dI = \frac{b\gamma\omega^2 B^2}{8\pi}(r_2^2 - r_1^2)\, d\Pi_0$, откуда мощность, рассеиваемая во всем диске, будет $W = \frac{b\gamma\omega^2 B^2}{4\pi} \int\limits_0^{\Pi_{0\,\max}} (r_2^2 - r_1^2)\, d\Pi_0$, и в выражении для тормозящего момента $M = b\gamma\omega B^2 K$ коэффициент формы примет вид

$$K = \frac{1}{4\pi} \int\limits_0^{\Pi_{0\,\max}} (r_2^2 - r_1^2)\, d\Pi_0. \qquad (12)$$

Интеграл в (12) легко вычисляется графически как площадь S_k, ограниченная осью абсцисс и кривой, полученной возведением в квадрат абсцисс правой половины кривой $\Pi_0(r)$ (рис. 3). При выполнении всех вычислений и построений с точностью 1% были получены значения $S_k = 0{,}93$ и $K = 0{,}074$.

Подставив в (12) аналитическое выражение

$$\Pi_0(r) = \left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right) \ln \frac{1-r}{1+r} + 2\left(r - \frac{1}{r}\right), \qquad (13)$$

полученное с помощью (4) и (11), можно путем аналитического интегрирования получить вполне точную формулу для момента. Для этого преобразуем (12) к виду

$$K = -\int\limits_0^1 r^2 \frac{d\Pi_0}{dr}\, dr, \qquad (14)$$

и интегрируя далее (14) по частям с учетом (13), найдем, что

$$K = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^1 r \left[\left(r^2 - \frac{1}{r^2}\right) \ln \frac{1-r}{1+r} + 2\left(r - \frac{1}{r}\right)\right] dr. \qquad (15)$$

В результате интегрирования (15), которое мы здесь опускаем, получим, что

$$K = \frac{\pi^2 - 8}{8\pi} = 0{,}074389\ldots, \qquad (16)$$

и, таким образом, в случае, когда половина вращающегося диска пронизывается однородным магнитным полем, тормозящий момент дается точной формулой

$$M = b\gamma\omega B^2 \frac{\pi^2 - 8}{8\pi}. \qquad (17)$$

Последний метод вычисления момента, изложенный здесь на примере, можно распространить и на более сложные случаи.

Поступило
27 X 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. Н. Дерюгин, ДАН, **82**, № 3 (1952).