Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

ФИЗИКА

Д. БЛОХИНЦЕВ

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(Представлено академиком Д. В. Скобельцыным 3 XII 1951)

§ 1. Введение

Для современной теории поля характерны две основные черты: а) линейность уравнений и б) точечность частиц. Вместе с тем, подобные теории приводят к известным расходимостям ряда физических величин (нулевая энергия поля, собственная энергия частиц). Эти расходимости приходится преодолевать более или менее искусственными приемами (например, метод „перенормировки“ массы и заряда ([1])). Само существование этих расходимостей указывает на несостоятельность теории применительно к малым областям пространства и времени и на необходимость радикального изменения теории для малых промежутков времени и малых расстояний.

Поскольку указанные выше общие черты современной теории формулируются еще до квантования величин, то они являются „классическими“, а не „квантовыми“ особенностями теории. В силу этого возможные физические последствия отказа от этих черт могут быть, в духе принципа соответствия, изучены еще в рамках классического рассмотрения.

Ранее нами ([2-4]) были исследованы последствия отказа от точечности частицы и было показано, что теория, допускающая неточечное взаимодействие, неминуемо ведет к распространению взаимодействия (мы будем в дальнейшем говорить «сигналов») со скоростями, превышающими скорость света*. Теперь мы намерены рассмотреть последствия отказа от линейности теории.

Оказывается, что нелинейные теории поля, так же как и неточечные линейные теории, ведут к поразительному факту распространения сигнала со скоростью, большей скорости света в пустоте. Поэтому кажется весьма вероятным, что такое «аномальное» распространение сигналов в малых областях пространства — времени должно быть характерной чертой будущей теории поля.

§ 2. Нелинейная теория скалярного или псевдоскалярного мезонного поля

Лагранжиан для этого случая поля может быть написан как функция двух инвариантов:

$$K = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\psi)^2\right], \quad I = \frac{1}{2}\psi^2, \tag{1}$$

* Рассмотренная в работах ([2-4]) неточечная теория взаимодействия полей по физической сущности очень близка к квантовой теории М. А. Маркова ([5, 6]) протяженных частиц. Недавно, на много лет позднее наших работ, сходное исследование произведено Юленбеком и Пэй ([7]).

так что

$$L = L(K, I). \tag{2}$$

Из релятивистски инвариантного вариационного принципа

$$\delta \int L(K, I)\, dt\, dx = 0 \tag{3}$$

нетрудно получить следующее уравнение для поля ψ:

$$\frac{\partial L}{\partial K}\left[-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + \nabla^2\psi\right] - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial K}\right)\frac{\partial\psi}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\partial L}{\partial K}\right)\nabla\psi + \frac{\partial L}{\partial I}\psi = 0, \tag{4}$$

которое очевидным образом инвариантно относительно преобразования Лорентца.

Имея в виду, что

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial K}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2}\frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial^2 L}{\partial K\,\partial I}\frac{\partial I}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\nabla\left(\frac{\partial L}{\partial K}\right) = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2}\nabla K + \frac{\partial^2 L}{\partial K\,\partial I}\nabla I, \tag{5'}$$

мы легко получим из (4) уравнение для поля ψ в явном виде. Мы выпишем это уравнение для одномерного пространства (t, x). Обозначая первые производные через $p = \frac{\partial\psi}{\partial t}$, $q = \frac{\partial\psi}{\partial x}$, а вторые через $r = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$, $s = \frac{\partial^2\psi}{\partial t\,\partial x}$, $t = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 L}{\partial K^2}\Big/\frac{\partial L}{\partial K} = \alpha$, $\frac{\partial^2 L}{\partial K\,\partial I}\Big/\frac{\partial L}{\partial K} = \beta$, $\frac{\partial L}{\partial I}\Big/\frac{\partial L}{\partial K} = \gamma$, найдем:

$$Ar + 2Bs + Ct + R = 0, \tag{6}$$

где $A = -(1 + \alpha p^2)$, $B = \alpha pq$, $C = (1 - \alpha q^2)$ и $R = [\gamma - 2\beta K]$.

Обозначая далее направление характеристики через $\xi = dx/dt$, получим для ξ уравнение:

$$A\xi^2 - 2B\xi + C = 0, \tag{7}$$

которое имеет решение

$$\xi = \frac{\pm\sqrt{1 + 2\alpha K} - \alpha pq}{(1 + \alpha p^2)}, \tag{8}$$

или, при малых $\alpha(K, I)$:

$$\xi = \pm 1 \mp {}^1\!/_2\,\alpha(p \pm q)^2 + \ldots \tag{9}$$

Если теперь представить себе, что на отрезке $a < x < b$ в момент $t = 0$ задано некоторое начальное состояние $\psi, p, q = \partial\psi/\partial x$, то, как непосредственно видно из (9), при $\alpha < 0$ $|\xi| < 1$, т. е. $|dx/dt| > 1$. Т. е. состояние из точек $a < x < b$ будет распространяться со скоростью dx/dt, большей скорости света в пустоте $(c = 1)$, кроме исключительного случая $p = \mp q$.

§ 3. Нелинейная теория электромагнитного поля

Рассмотрим теперь тот же вопрос применительно к нелинейной теории М. Борна ([8]). В этом случае лагранжиан может быть написан в виде:

$$L = L(K, I^2), \tag{10}$$

где $K = {}^1\!/_2(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2)$, $I = (\mathbf{E}, \mathbf{H})$, а $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ имеют смысл напряженностей электромагнитного поля. Варьируя электромагнитные потенциалы

A, φ ($\mathbf{E} = -\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla\varphi, \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$), получим

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{D} = M\mathbf{E} - N\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = M\mathbf{H} + N\mathbf{E} \tag{12}$$

и $M = \partial L / \partial K$, $N = \partial L / \partial I$.

Вторая группа уравнений

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{13}$$

получается сама собой из определения $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ через $\mathbf{A}$ и φ. В явном виде уравнения для $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ получим, если выразить производные от $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ через производные от $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, K и I.

В дальнейшем рассмотрим одномерный случай, именно $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0)$ и $E_x = E(t, z)$, $H_y = H(t, z)$. Тогда уравнения (11), (13) примут простой вид:

$$(1 + \alpha E^2) \frac{\partial E}{\partial t} + \alpha EH \frac{\partial E}{\partial z} - \alpha EH \frac{\partial H}{\partial t} + (1 - \alpha H^2) \frac{\partial H}{\partial z} = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial E}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0, \tag{14'}$$

где попрежнему $\alpha = \frac{\partial^2 L}{\partial K^2} \Big/ \frac{\partial L}{\partial K}$. Уравнение для характеристического направления $\xi = dz / dt$ будет теперь:

$$(1 + \alpha E^2) \xi^2 + 2\alpha EH\xi + (1 - \alpha H^2) = 0, \tag{15}$$

откуда

$$\xi = \frac{\pm \sqrt{1 + 2\alpha K} - \alpha EH}{(1 + \alpha E^2)}, \tag{16}$$

или, при малых α:

$$\xi = \pm 1 \mp {}^1/_2\, \alpha (E \pm H)^2 + \ldots, \tag{16'}$$

т. е. и в этом случае мы приходим к возможности сверхсветовых сигналов.

Интересно еще и то обстоятельство, что в подобных нелинейных теориях нельзя заранее исключить и такую ситуацию, когда при определенных значениях E, H или ψ характеристические направления сделаются мнимыми, так что уравнения поля станут в (t, x) уравнениями эллиптического типа, а это будет означать, что понятие причинной последовательности событий потеряет свой смысл, и мы будем иметь дело со связанным «комком» событий, которые взаимно друг друга обусловливают, но не следуют одно за другим. Может ли на самом деле возникнуть нечто подобное, например, «внутри» частиц,— это остается пока открытым вопросом.

Известно, что квантование нелинейных уравнений поля представляет нерешенную математическую задачу. Из изложенного видно, что трудности формулировки квантовых условий для нелинейного поля имеют не только математическую природу. Ввиду возможности появления взаимодействия, распространяющегося со скоростью больше c, метод Гамильтона применительно к нелинейному полю будет столь же несостоятелен, как он несостоятелен по отношению к неточечным взаимодействиям.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Сборн. Сдвиг уровней атомных электронов, 1950. [2] Д. Блохинцев, Уч. зап. МГУ (физика) (1945). [3] Д. Блохинцев, Journ. of Phys., **10**, 167 (1946); ЖЭТФ, **16**, 965 (1946). [4] Д. Блохинцев, ЖЭТФ, **18**, 566 (1948). [5] М. А. Марков, ЖЭТФ, **10**, 1311 (1940); **16**, 790 (1946). [6] М. А. Марков, ЖЭТФ, **21**, 11 (1951). [7] A. Pais and G. Uhlenbeck, Phys. Rev., **79**, 145 (1951). [8] M. Born, Proc. Roy. Soc., **143**, 410 (1934).