Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 3

МЕХАНИКА

М. Ф. ШУЛЬГИН

К ТЕОРИИ ЛАГРАНЖЕВЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 23 I 1952)

Настоящая статья является развитием работы (1), в которой были рассмотрены уравнения движения голономных неконсервативных систем в форме Гамильтона и дано обобщение классической теоремы Пуассона на случай этих систем.

Здесь мы рассматриваем систему лагранжевых уравнений

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}-\frac{T}{\partial q_i}=Q_i \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

и устанавливаем теорему о свойствах интегралов этой системы, аналогичную классической теореме Пуассона. В случае, когда уравнения (1) допускают первый интеграл, линейный относительно скоростей, мы приводим эти уравнения к форме Лагранжа с избыточными переменными. Тем самым получается возможность непосредственного применения к голономным неконсервативным системам с линейным интегралом теорий, аналогичных теориям классической динамики (Гамильтона — Якоби, Пуассона и др.) (2).

1. Величины $\dot{q}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ мы можем рассматривать как функции обобщенных импульсов $p_i=\partial T/\partial \dot{q}_i$ $(i=1,\ldots, n)$ и наоборот.

Допустим, что нам известен некоторый первый интеграл $\varphi(t; q_i; \dot{q}_i)=$ $=\text{const}$ уравнений (1). Тогда, если ввести в рассмотрение функцию Гамильтона H, то функция φ должна удовлетворять тождественно условию:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\dot{q}_i+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{q}_i}\frac{\partial^2 H}{\partial p_i\partial p_j}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j}+Q_j\right)\equiv 0. \tag{2}$$

Введем избыточные переменные $u_1, u_2, \ldots, u_n$ и положим

$$R=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{u}_i+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i}+Q_i\right)u_i. \tag{3}$$

Тогда мы можем переписать систему (1) так:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i}-\frac{\partial R}{\partial u_i}=0 \quad (i=1,\ldots,n), \tag{4}$$

вместе с уравнениями

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial R}{\partial q_i}=0 \quad (i=1,\ldots,n), \tag{5}$$

служащими для определения избыточных переменных u_i. Совокупность уравнений (4) и (5) образует систему $2n$ лагранжевых уравнений с кинетическим потенциалом $R(t;\ q_i;\ \dot{q}_i;\ u_i;\ \dot{u}_i)$.

2. Лемма. *Если* $\varphi(t;\ q_i;\ \dot{q}_i) = \text{const}$ *есть интеграл системы* (1), *то система* (5) *удовлетворяется значениями*

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{6}$$

Доказательство. Дифференцируя уравнения (6) по времени, рассматривая при этом $\dot{q}_j$ как функции от p_i, заменяя затем $\dot{p}_i$ их значениями из уравнений (1), принимая во внимание (2), будем иметь:

$$\dot{u}_i = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} - \sum_{j,\, k=1}^{n} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_i} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial q_j \partial \dot{q}_k} + \frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k} \right) u_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{7}$$

Заменяя в уравнениях (5) величины u_i, $\dot{u}_i$ их выражениями из (7) и (6), выполняя затем дифференцирование по t, получим тождества:

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j,\, k=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{q}_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} \left(\frac{\partial T}{\partial q_j} + Q_j \right) \right] \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Таким образом, всякому первому интегралу системы (1) соответствует решение (6) дополнительной системы (5).

3. Из установленной леммы непосредственно вытекает теорема, аналогичная классической теореме Пуассона.

Теорема. *Пусть известен некоторый первый интеграл*

$$f(t;\ q_1, \ldots, q_n;\ \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n;\ u_1, \ldots, u_n;\ \dot{u}_1, \ldots, \dot{u}_n) = \text{const} \tag{8}$$

расширенной системы (4) *и* (5). *Если в этом интеграле заменить избыточные переменные* u_i *и* $\dot{u}_i$ *их значениями из равенств* (6) *и* (7), *в которых* $\varphi = \text{const}$ *есть интеграл уравнений* (1), *то равенство* (8) *будет выражать вообще некоторый новый интеграл системы* (1).

Установленная теорема дает возможность, зная один интеграл расширенной системы (4) и (5) и один интеграл уравнений (1), найти второй интеграл уравнений (1); комбинируя этот новый интеграл с прежним интегралом расширенной системы, мы получили бы третий интеграл уравнений (1), и так далее.

4. Частные случаи. 1) Рассмотрим случай склерономной системы, т. е. когда уравнения (1) и, следовательно, функция R не зависят явно от t. В этом случае расширенная система (4) и (5) всегда допускает первый интеграл вида

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i + \frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i} \dot{u}_i \right) - R = \text{const}. \tag{9}$$

Положим, что известен также интеграл $\varphi(t; q_i;\ \dot{q}_i) = \text{const}$ системы (1).

Если теперь в равенстве (9) заменить величины u_i, $\dot{u}_i$ их значениями из (6) и (7), то равенство (9) будет выражать вообще новый интеграл уравнений движения (1). Этому новому интегралу, на основании тождества (2) и условий

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 T}{\partial q_i \partial q_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_k \partial p_j} = \begin{cases} 1 \text{ при } j = i, \\ 0 \text{ при } j \neq i, \end{cases} \tag{10}$$

можно придать вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = c_1 = \text{const}. \tag{11}$$

Таким образом, *если* $\varphi(t;\, q_i;\, \dot{q}_i) = \text{const}$ *есть интеграл склерономной системы* (1), *то* $\partial\varphi/\partial t = c_1$ *будет также интегралом этой системы, а, следовательно, интегралами будут и* $\partial^2\varphi/\partial t^2 = c_2$, $\partial^3\varphi/\partial t^3 = c_3$ *и т. д. Если же функция* φ *явно от* t *не зависит, то равенство* (11) *не будет интегралом системы* (1).

2) Рассмотрим случай, когда некоторые из координат явно не входят в уравнения (1), т. е. являются циклическими. Пусть циклическими будут первые k координат $q_1, q_2, \ldots, q_k$ $(k \leqslant n)$. В этом случае расширенная система (4) и (5) дает k первых интегралов:

$$\frac{\partial R}{\partial q_\rho} = c_\rho = \text{const} \quad (\rho = 1, \ldots, k). \tag{12}$$

Если в этих интегралах заменить u_i, $\dot{u}_i$ их значениями из равенств (6) и (7), в которых $\varphi(t;\, q_i;\, \dot{q}_i) = \text{const}$ есть интеграл уравнений (1), то равенства (12) будут выражать вообще k новых интегралов системы (1). Этим новым интегралам, на основании соотношений (10), можно придать вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} = c_\rho = \text{const} \quad (\rho = 1, \ldots, k). \tag{13}$$

Итак, если q_ρ $(\rho = 1, \ldots, k)$ — циклические координаты и $\varphi(t;\, q_i;\, \dot{q}_i) = c$ есть интеграл системы (1), то интегралами этой системы будут также и равенства:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q_\rho} = c_\rho, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_\rho \partial q_\mu} = c_{\rho\mu}, \ldots \quad (\rho, \mu, \ldots = 1, 2, \ldots, k).$$

5. Рассмотрим теперь случай, когда уравнения (1) допускают первый интеграл, линейный относительно скоростей

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} A_j \dot{q}_j + A = \text{const}, \tag{14}$$

и, следовательно, известно решение дополнительной системы (5):

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} A_j \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_i} \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{15}$$

где A_i, A и величины u_i суть известные функции $q_1, q_2, \ldots, q_n, t$. Покажем, как, используя это решение, можно понизить порядок расширенной системы (4) и (5) и придать преобразованным уравнениям лагранжеву форму с избыточными переменными.

Уравнения (15) мы можем рассматривать как уравнения n конечных связей, наложенных на $2n$ переменных q_i, u_i. Пусть зависимыми будут избыточные переменные u_i; их производные определятся формулами:

$$\dot{u}_i = \sum_{k=1}^{n+1} B_{ki}\dot{q}_k, \quad \dot{q}_{n+1} = \dot{t} = 1 \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{16}$$

где B_{ki} — известные функции от q_i, t. Преобразуем уравнения (4) и (5), исключая из них величины $\dot{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, сохраняя, однако, сами избыточные переменные u_i.

Обозначая через L результат исключения $\dot{u}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ из выражения R через посредство уравнений (16), получим:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_i} + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_k}, \quad \frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial R}{\partial u_i},$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial R}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_k}\frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{17}$$

Подставив найденные выражения для $\partial R/\partial \dot{q}_i$, $\partial R/\partial q_i$ и $\partial R/\partial u_i$ в уравнения (4) и (5), а затем исключив из полученных уравнений величины $\frac{d}{dt}\frac{\partial R}{\partial \dot{u}_i}$, будем иметь:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - E_i(L) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$E_i(L) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \sum_{k=1}^{n} B_{ik}\frac{\partial L}{\partial u_k}, \tag{18}$$

ибо, вследствие интегрируемости уравнений (16), все величины

$$\sum_{j=1}^{n+1}\frac{\partial B_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j - \frac{dB_{ik}}{dt} = 0 \quad (i,\ k = 1, \ldots, n).$$

Уравнения (18) представляют собой лагранжеву систему с избыточными переменными (²). Присоединив к этим уравнениям уравнения (16), получим полную систему $2n$ уравнений для определения $2n$ переменных q_i, u_i в функции от t.

Уравнения (18) и (16) заменяют расширенную систему (4) и (5), а следовательно, и первоначальную систему (1), если последняя допускает первый интеграл (14).

Таким образом, имеет место предложение:

Уравнения движения всякой голономной неконсервативной системы с линейным интегралом могут быть представлены в лагранжевой форме с избыточными переменными.

Что касается уравнений типа (18) или союзных им гамильтоновых уравнений с избыточными переменными, то теория интегрирования этих уравнений, как известно, разработана во многих деталях (²). Таким образом, мы получаем возможность применять эти теории к интегрированию уравнений движения голономных неконсервативных систем, если они допускают линейный интеграл.

6. Заметим еще, что метод, которым мы здесь пользовались, без особых изменений можно применить к исследованию движения систем переменной массы, теория интегрирования уравнений движения которых, как известно, почти не разработана.

Среднеазиатский государственный университет
Ташкент

Поступило
10 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ М. Ф. Шульгин, ДАН, 81, № 1 (1951). ² М. Ф. Шульгин, Бюлл. Среднеазиатск. гос. ун-та, в. 30 (1949).