Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. М. ЭЙДУС

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОТ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 21 I 1952)

Пусть Ω — конечная область с границей Γ в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Рассмотрим задачу о собственных значениях оператора эллиптического типа $Lu = \sum\limits_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)$ при краевом условии $u\,|_{\Gamma} = 0$. Функции $a_{ij}(x)$ предполагаем трижды непрерывно дифференцируемыми в $\Omega+\Gamma$, причем $a_{ij}=a_{ji}$.

Введем обозначения:

$$E(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j}\,d\Omega; \quad D(\varphi) = \int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)^2 d\Omega;$$

$$H(\varphi, \psi) = \int\limits_{\Omega} \varphi\psi\, d\Omega; \quad E(\varphi) = E(\varphi, \varphi); \quad H(\varphi) = H(\varphi, \varphi).$$

С помощью метода конечных разностей доказано ([1]) существование системы собственных значений λ_k и собственных функций $u_k(x)$, где $u_k(x)$ имеет непрерывные производные второго порядка в Ω и удовлетворяет уравнению $Lu_k + \lambda_k u_k = 0$, а также условиям $H(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ и $u_k \in \overset{0}{D}$, где $\overset{0}{D}$ — замыкание класса D, состоящего из функций, имеющих непрерывные первые производные в Ω и обращающихся тождественно в нуль в некоторой пограничной полоске, при метрике, определяемой равенством

$$\|\varphi\|^2 = H(\varphi) + D(\varphi). \tag{1}$$

Каждая из u_k является решением задачи о минимуме функционала $E(v)$ в пространстве $\overset{0}{D}$ при дополнительных условиях $H(v)=1$, $H(v, u_i) = 0$, где $i = 1, 2, \ldots, k-1$.

Пусть последовательность областей $\Omega_n \subset \Omega$ с границами Γ_n такова, что всякая внутренняя подобласть Ω содержится во всех Ω_n с достаточно большими номерами. Собственные числа для области Ω_n обозначим через λ_{kn}, а собственные функции — через u_{kn}. Систему u_{kn} предполагаем нормированной и ортогональной. Имеем $u_{kn} \in \overset{0}{D}_n$, где пространство $\overset{0}{D}_n$ определяется для области Ω_n так же, как пространство $\overset{0}{D}$ для области Ω.

Всякую функцию v, заданную в Ω_n, доопределим в $\Omega - \Omega_n$, положив там $v = 0$. Точно так же будем доопределять первые производные от v. Тогда $\overset{0}{D}_n \subset \overset{0}{D}$. В [2] доказано, что при $n \to \infty$ $\lambda_{kn} \to \lambda_k$. В настоящей заметке доказывается, что расстояние (в смысле метрики (1)) между u_{kn} и подпространством Λ_k собственных функций, соответствующих λ_k, стремится к нулю.

Для доказательства этого утверждения достаточно установить компактность последовательности u_{kn}, а также, что всякий ее предельный элемент принадлежит Λ_k.

Перейдем к доказательству компактности для u_{1n}.

Пусть $v \in D$, тогда при всех достаточно больших n имеет место неравенство:

$$\lambda_{1n} = E(u_{1n}) \leqslant \frac{E(v)}{H(v)}. \tag{2}$$

Пользуясь теоремой о полной непрерывности оператора вложения [3], выделим из последовательности u_{1n} такую подпоследовательность u_{1n_s}, что существуют пределы $u_{1n_s} \to u_1$ в $L_2(\Omega)$ и $\lambda_{1n_s} \to \lambda_1$. В дальнейшем индекс s опускается.

Воспользуемся неравенством

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial w}{\partial x_i} \right)^2 d\Omega \leqslant c \int\limits_{\Omega_2} [w^2 + (Lw)^2]\, d\Omega, \tag{3}$$

где Ω_1 — внутренняя подобласть области Ω_2, $\Omega_2 \subset \Omega$ и c — постоянная. Из (3) следует, что $\frac{\partial u_{1n}}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega_0)$, где Ω_0 — любая внутренняя подобласть Ω и $\frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ — обобщенная производная. Из (2) получим $D(u_1) < \infty$. Пусть $l > n$, $\Omega_l \supset \Omega_n$, тогда $E(u_{1n}, u_{1l}) = \lambda_{1l} H(u_{1n}, u_{1l})$. Отсюда, полагая $l \to \infty$, получим

$$E(u_{1n}, u_1) = \lambda_1 H(u_{1n}, u_1). \tag{4}$$

Далее доказывается, что при $n \to \infty$ $E(u_{1n}, u_1) \to E(u_1)$. Из (4) получим $E(u_1) = \lambda_1$, следовательно, $E(u_{1n}) \to E(u_1)$. Отсюда, как легко видеть, следует, что $\frac{\partial u_{1n}}{\partial x_i} \to \frac{\partial u_1}{\partial x_i}$ в $L_2(\Omega)$. Итак, $u_{1n} \to u_1$ в метрике (1) и $u_1 \in \overset{0}{D}$, причем $H(u_1) = 1$.

Из (2) получим

$$\lambda_1 = E(u_1) \leqslant \frac{E(v)}{H(v)},$$

где v — любая функция из $\overset{0}{D}$. Отсюда следует, что λ_1 — первое собственное число и $u_1 \in \Lambda_1$.

Докажем компактность u_{kn}. Допустим, что для каждой последовательности $u_{pn}, p = 1, 2, \ldots, k-1$, доказано, что из нее можно выделить подпоследовательность u_{pn_σ}, сходящуюся в метрике (1) к $u_p \in \Lambda_p$, причем $\lambda_{pn_\sigma} \to \lambda_p$, и $H(u_i, u_j) = \delta_{ij}$ при $i, j = 1, 2, \ldots, k-1$. Пусть подпоследовательность $u_{pn_\sigma} \to u_p$ при любом $p = 1, 2, \ldots, k-1$. Ниже индекс σ опускается.

Возьмем такую функцию $v \in \overset{0}{D}$, что $H(v) = 1$ и при $p = 1, 2, \ldots, k-1$ $H(v, u_p) = 0$. Тогда существует такая последовательность $v_q \in D$, что $\| v_q - v \| \to 0$ при $q \to \infty$.

Введем обозначения:

$$\varepsilon_{pq} = H(u_p, v_q), \quad w_q = v_q - \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_{pq} u_p,$$

$$\varepsilon_{pqn} = H(u_{pn}, v_q), \quad w_{qn} = v_q - \sum_{p=1}^{k-1} \varepsilon_{pqn} u_{pn}.$$

Очевидно, найдется такой номер q_0, что при $q > q_0$ $H(w_q) > 0$. Зафиксируем некоторое $q > q_0$, тогда при достаточно больших n $w_{qn} \in \overset{0}{D}_n$. Кроме того, при $p = 1, 2, \ldots, k-1$ $H(w_{qn}, u_{pn}) = 0$. Отсюда

$$\lambda_{kn} = E(u_{kn}) \leqslant \frac{E(w_{qn})}{H(w_{qn})}. \tag{5}$$

При $n \to \infty$ правая часть неравенства (5) имеет конечный предел $\frac{E(w_q)}{H(w_q)}$, откуда следует $\lambda_{kn} < c_k$. Далее вполне аналогично тому, как это сделано выше, выделяется подпоследовательность $\lambda_{kn_s} \to \lambda_k$ и $u_{kn_s} \to u_k$ в метрике (1), тогда $H(u_k) = 1$ и $H(u_i, u_k) = 0$ при $i = 1, 2, \ldots, k-1$. Переходя в неравенстве (5) к пределу сначала при $n \to \infty$, а затем при $q \to \infty$, получим

$$\lambda_k = E(u_k) \leqslant E(v);$$

следовательно, λ_k — k-е собственное число и $u_k \in \Lambda_k$. Наше утверждение доказано.

Очевидно, что не только последовательность λ_{kn_s}, но и вся последовательность λ_{kn} сходится к λ_k. В случае, когда λ_k — простое собственное число, можно изменением знака у некоторых u_{kn} добиться того, что вся последовательность u_{kn} будет сходиться к u_k.

Рассмотрим теперь задачу о собственных значениях при условии на границе $\sum\limits_{i, j=1}^{m} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cos(\nu, x_j) = 0$, где ν — направление внешней нормали в точках Γ.

В ([2]) приведен пример, показывающий, что в этом случае наше утверждение относительно λ_{kn} и u_{kn} может не иметь места. Однако оно будет иметь место, если наложить некоторое ограничение на последовательность Ω_n. Предположим, что каждая из областей Ω, Ω_n удовлетворяет условиям, сформулированным в ([1]). Ниже мы пользуемся обозначениями из ([1]). Пусть Γ_{tn} — та часть границы Γ_n, которая содержится в $\Omega_{\delta t}$. Потребуем, чтобы прямые, параллельные координатной оси OX_{r_t}, пересекали Γ_{tn} не более, чем в одной точке. Тогда будет иметь место все доказанное выше. Таким образом можно не предполагать близость нормалей в соответствующих точках Γ_n и Γ.

Поступило
15 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. М. Эйдус, ДАН, 83, № 2 (1952). [2] Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, 1933. [3] С. Л. Соболев, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, 1950.