Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

И. С. АРЖАНЫХ

РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОСНОВНЫХ [ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОЛЯ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 10 XII 1951)

Основные задачи теории поля, вытекающие из гидродинамики вязкой и идеальной жидкости, теории упругости и электродинамики, состоят в следующем. В области $Q+S$ требуется определить вектор $\mathbf{v}(p)$, правильный (Q внутри S) или регулярный (Q вне S), удовлетворяющий уравнениям в частных производных

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \vec{\Omega}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1}$$

и соответствующим граничным условиям:

а) первая задача $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = g_1$, $(\mathbf{v}, \mathbf{e}_2) = g_2$ ($\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — единичные векторы координатных линий граничной поверхности S);

б) вторая задача $(\mathbf{v}, \mathbf{n}) = f$ ($\mathbf{n}$ — вектор нормали).

Для разрешимости этих задач должны выполняться некоторые необходимые условия. Будем отличать внутреннюю задачу от внешней с помощью параметра ε: если $\varepsilon = +1$, то имеем внутреннюю задачу, если $\varepsilon = -1$, то внешнюю (нормаль направим вне S). Обозначим знаком $\int$ результат интегрирования по области, а знаком $\oint$ — интеграл по граничной поверхности, которую будем считать простой, гладкой в смысле Ляпунова [1]. Необходимые условия разрешимости первой задачи, как легко показать, состоят в следующем: $\operatorname{div}\vec{\Omega} = 0$,

$$\int \vec{\Omega}\, dq = \varepsilon \oint (g_1 \mathbf{e}_2 - g_2 \mathbf{e}_1)\, ds, \quad (\vec{\Omega}, \mathbf{n}) = h_1 h_2 \left(\frac{\partial}{\partial \xi_1}\frac{g_2}{h_2} - \frac{\partial}{\partial \xi_2}\frac{g_1}{h_1}\right),$$

где h_1, h_2 — метрические коэффициенты, $h_k \dfrac{\partial \mathbf{s}}{\partial \xi_k} = \mathbf{e}_k$, $k = 1, 2$. Необходимые условия разрешимости второй задачи известны [2].

Если выполнены необходимые условии разрешимости, то основные задачи теории поля имеют единственные решения. В настоящем сообщении мы построим эти решения с помощью резольвенты $D(t, s)$ интегрального уравнения

$$\delta(t) = \delta_* + \frac{1}{2\pi}\oint \delta(s)\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n(s)}\, ds \tag{2}$$

и резольвенты $C(t, s)$ интегрального уравнения

$$\gamma(t) = \gamma_* - \frac{1}{2\pi}\oint \gamma(s)\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n(t)}\, ds. \tag{3}$$

Поставим задачу о построении наиболее простой подстановки

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \operatorname{grad}\Phi, \quad \nabla^2\Phi = 0, \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 = \vec{\Omega}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_0 = \theta, \tag{5}$$

которую можно было бы использовать и для определения функции Φ по граничным условиям. Известные методы решения [2-4] этим двум требованиям не удовлетворяют. Поэтому рассмотрим новый метод.

Лемма. *Для представления вектора* $\mathbf{v}$ *в виде* (4), (5) *достаточно знать для внутренней задачи резольвенту* $D(t, s)$ *уравнения* (2), *а для внешней — резольвенту* $C(t, s)$ *уравнения* (3).

1. Внутренняя задача.

$$\mathbf{v}_0(p) = \frac{1}{4\pi}\int \frac{1}{r(p,q)}(\operatorname{rot}_q\vec{\Omega} - \nabla_p\theta)\,dq + $$
$$+ \frac{1}{4\pi}\oint \frac{1}{r(p,s)}(\mathbf{n}\,\theta - [\mathbf{n}\,\vec{\Omega}])\,ds + \frac{1}{4\pi}\operatorname{rot}_p\oint \frac{\mathbf{n}(s)\,\delta(s)}{r(p,s)}\,ds. \tag{6}$$

В силу теорем Остроградского — Гаусса и Пуассона будем иметь $\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = \theta$,

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_0 = \vec{\Omega} + \frac{1}{4\pi}\nabla_p\left(\operatorname{div}_p\int\frac{\vec{\Omega}}{r}\,dq + \operatorname{div}_p\oint\frac{\mathbf{n}\delta}{r}\,ds\right).$$

Пусть

$$\operatorname{div}_p\int\frac{\vec{\Omega}}{r}\,dq + \operatorname{div}_p\int\frac{\mathbf{n}\delta}{r}\,ds = 0. \tag{7}$$

Тогда уравнения (5) будут удовлетворены. Преобразуем равенство (7)

$$\oint\frac{\Omega_n(s)}{r(p,s)}\,ds + \oint\delta(s)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n(s)}\,ds = 0.$$

Слева здесь гармоническая функция. Поэтому, если это равенство будет иметь место в граничных точках t, то оно будет выполняться и внутри области. Выполнив предельный переход $(p\to t)$, получим интегральное уравнение для определения функции δ

$$\oint\frac{\Omega_n(s)}{r(t,s)}\,ds - 2\pi\delta(t) + \oint\delta(s)\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial n(s)}\,ds = 0. \tag{8}$$

Как известно [5], однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (8), имеет нулевое решение. Поэтому оно разрешимо.

2. Внешняя задача. Пусть

$$\mathbf{v}_0(p) = -\frac{1}{4\pi}\left(\int\frac{\nabla\theta}{r(p,q)}\,dq + \oint\frac{\mathbf{n}\theta}{r(p,s)}\,ds - \operatorname{rot}_p\int\frac{\vec{\omega}(q)}{r(p,q)}\,dq\right). \tag{9}$$

Тогда будем иметь

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = \theta, \quad \operatorname{rot}\mathbf{v}_0 = \vec{\omega} + \frac{1}{4\pi}\nabla_p\left(\oint\frac{\omega_n\,ds}{r(p,s)} + \int\frac{\operatorname{div}\vec{\omega}}{r(p,q)}\,dq\right). \tag{10}$$

Положим

$$\operatorname{div}\vec{\omega} = 0, \quad \vec{\omega}(p) + \frac{1}{4\pi}\nabla_p\oint\frac{\omega_n\,ds}{r(p,s)} = \vec{\Omega}(p). \tag{11}$$

Тогда уравнения (5) будут удовлетворены. Равенство (11) служит для определения вектора $\vec{\omega}$:

$$\vec{\omega}(p) = \vec{\Omega}(p) - \frac{1}{4\pi}\nabla_p \oint \frac{\gamma(s)}{r(p,s)}\,ds, \quad \gamma = \omega_n. \tag{12}$$

Отсюда следует, что нормальная проекция искомого вектора удовлетворяет уравнению

$$\gamma(t) = 2\Omega_n(t) - \frac{1}{2\pi}\oint \gamma(s)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n(t)}\,ds. \tag{13}$$

Однородное интегральное уравнение, соответствующее уравнению (13), имеет, как известно ([5]), ненулевое решение $\gamma_0(t)$. Однако оно разрешимо:

$$\gamma(t) = a\gamma_0 + 2\Omega_n - \frac{1}{\pi}\oint C(t,s)\,\Omega_n(s)\,ds. \tag{14}$$

Постоянная a находится из равенства $\oint \gamma(s)\,ds = 0$.

Перейдем к граничным задачам. Выполнив подстановку одним из указанных выше способов, мы получим для первой задачи граничные условия в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_k} = (g_k - (\mathbf{v}_0\,\mathbf{e}_k))\,h_k^{-1}, \quad k = 1, 2, \tag{15}$$

а для второй задачи в виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = f - (\mathbf{v}_0\,\mathbf{n}). \tag{16}$$

В силу третьего необходимого условия разрешимости первой задачи система уравнений (15) совместна и определяет гармоническую функцию Φ на S.

Теорема 1. *Для решения первой задачи теории поля достаточно знать резольвенту $D(t,s)$ (внутренняя задача) или резольвенту $C(t,s)$ (внешняя задача).*

В самом деле, в случае внутренней задачи положим

$$\Phi(p) = \frac{1}{2\pi}\oint \varphi(s)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n(s)}\,ds. \tag{17}$$

Тогда для φ получим интегральное уравнение (2), которое решается с помощью резольвенты D. В случае внешней задачи используем формулу Грина. Тогда получим для $\partial\Phi/\partial n$ интегральное уравнение (3), которое решается с помощью резольвенты C.

Теорема 2. *Для решения второй задачи теории поля достаточно знать резольвенты $D(t,s)$ и $C(t,s)$.*

1. Внутренняя задача. С помощью D находим $\mathbf{v}_0$. Определяем Φ через потенциал простого слоя

$$\Phi(p) = \frac{1}{2\pi}\oint \frac{\sigma(s)}{r(p,s)}\,ds. \tag{18}$$

После использования граничного условия получаем интегральное уравнение для функции σ. Резольвентой этого уравнения является C.

2. Внешняя задача. С помощью C находим $\mathbf{v}_0$. Определяем Φ по формуле Грина, а затем (после предельного перехода) находим $\Phi(s)$ с помощью резольвенты D.

Итак, если известны резольвенты внутренних проблем Дирихле и Неймана, то вектор $\mathbf{v}(p)$ внутренних и внешних задач теории поля определяется в замкнутом виде. Поэтому мы называем функции D и C резольвентами основных задач теории поля.

В качестве одного из эффективных приложений изложенного метода построены интегральные уравнения, решающие следующие граничные задачи:

а) первая задача $(\mathbf{v}_l \mathbf{e}_1) = g_l^{(1)}$, $(\mathbf{v}_l \mathbf{e}_2) = g_l^{(2)}$, $l=1, 2, \ldots, m$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_l = \overrightarrow{\Omega}_l, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_l = \vartheta_l + \sum_{k=1}^{m} (\overrightarrow{\omega}_{lk} \mathbf{v}_k); \tag{19}$$

б) вторая задача $(\mathbf{v}_l \mathbf{n}) = f_l$, $l = 1, 2, \ldots, m$,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}_l = \overrightarrow{\omega}_l + \sum_{k=1}^{m} \vartheta_{lk} \mathbf{v}_k, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_l = \theta_l. \tag{20}$$

Институт математики и механики
Академии наук Узб.ССР

Поступило
10 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Л. Соболев, Уравнения математической физики, М., 1947. [2] Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, М., 1938. [3] Г. Вилля, Теория вихрей, М., 1936. [4] И. С. Аржаных, ДАН, 79, № 1 (1951). [5] Л. Н. Сретенский, Теория ньютоновского потенциала, М., 1946.