Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

О КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ $rt - s^2 = \varphi(x, y)$ И ЕЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ПРИЛОЖЕНИЯХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 I 1952)

1. Вопрос о разрешимости краевой задачи для уравнения

$$rt - s^2 = \varphi(x, y), \tag{1}$$

вопрос о регулярности выпуклой поверхности, у которой гауссова кривизна как функция нормали к поверхности регулярна, и вопрос существования поверхности с данной гауссовой кривизной связаны друг с другом. Мы будем их рассматривать одновременно, пользуясь при этом и аналитическими и геометрическими средствами.

Лемма 1. *Пусть $\varphi(x, y)$ — любая аналитическая функция в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$, принимающая только положительные значения, ψ — любая аналитическая функция на границе этого круга. Тогда существует аналитическая функция $z(x, y)$, удовлетворяющая в круге уравнению* (1) *и совпадающая на окружности круга с заданной функцией ψ.*

Доказательство этой леммы основано на теореме С. Н. Бернштейна [1] о существовании решения краевой задачи для общего уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа. Согласно этой теореме краевая задача разрешима, если можно указать априорные оценки для предполагаемого решения и его производных первых двух порядков.

Для получения априорных оценок для решения уравнения (1), его производных первого порядка и производных второго порядка на окружности круга мы пользуемся почти теми же соображениями, что и у С. Н. Бернштейна в цитированной работе при рассмотрении краевой задачи для уравнения (1) в случае, когда $\varphi(x, y) = k^2$ — положительная постоянная.

Для получения оценок вторых производных решения внутри круга мы рассматриваем выражение

$$n = \lambda r, \tag{2}$$

где λ — любая регулярная функция в круге $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Если предположить, что эта функция достигает максимума во внутренней точке круга, то в этой точке, оказывается, имеет место неравенство

$$\lambda_{xx}s^2 - 2\lambda_{xy}sr + \lambda_{yy}r^2 \leqslant -(\varphi\lambda)_{xx}. \tag{3}$$

Полагая $\lambda = 1 + y^2$ и используя то обстоятельство, что оценки вторых производных на границе круга уже получены, находим оценку для производной r во всем круге. Аналогично получается оценка для t, после чего оценка для s получается из уравнения (1).

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x, y)$ — k раз дифференцируемая положительная функция ($k \geqslant 3$) в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ и ψ — непрерывная функция на окружности этого круга. Тогда существует $k+1$ раз дифференцируемое решение $z(x, y)$ уравнения* (1) *в указанном круге, принимающее на окружности круга значения ψ.*

Для доказательства леммы 2 строим последовательность аналитических функций $\varphi_n(x, y)$, сходящихся равномерно с их производными до k-го порядка в круге $x^2+y^2 \leqslant R^2$ к функции $\varphi(x, y)$, и последовательность аналитических функций ψ_n, сходящихся равномерно к функции ψ на окружности круга. По лемме 1, существует аналитическая функция $z_n(x, y)$, удовлетворяющая уравнению $rt-s^2=\varphi_n$ в круге, принимающая значения ψ_n на окружности. Оказывается, последовательность функций $z_n(x, y)$ равномерно ограничена и для ее производных до $k+2$-го порядка включительно в каждой внутренней точке круга, удаленной от окружности на расстояние не меньше $\delta > 0$, могут быть получены оценки, не зависящие от n.

Из последовательности $z_n(x, y)$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Предельная функция $z(x, y)$ будет $k+1$ раз дифференцируемой. Она удовлетворяет уравнению (1) в круге и обращается на окружности в заданную функцию ψ.

2. Введение понятия гауссовой кривизны для выпуклой поверхности не нуждается в предположении регулярности поверхности в смысле двукратной дифференцируемости. Она может быть определена как предел отношения сферического изображения области на поверхности к площади области, когда область неограниченно стягивается к данной точке. Существование в этом смысле гауссовой кривизны в каждой точке не обеспечивает двукратной дифференцируемости поверхности. А. Д. Александров построил выпуклую поверхность, у которой гауссова кривизна положительна и непрерывна, не являющуюся дважды дифференцируемой ([2]).

Если поверхность регулярна, то, как известно, гауссова кривизна в смысле данного выше определения равна произведению главных кривизн поверхности.

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — выпуклые поверхности с положительной гауссовой кривизной, удовлетворяющие условиям:*

1) *обе поверхности имеют одно и то же сферическое изображение — область ω, расположенную на одной полусфере, например, $x^2+y^2+z^2=1$, $z \geqslant 0$;*

2) *в точках с параллельными и одинаково направленными нормалями гауссовы кривизны поверхностей равны;*

3) *опорные функции поверхностей на границе области ω одинаковы. Тогда поверхности F_1 и F_2 совпадают.*

Чтобы разъяснить идею доказательства этой теоремы, предположим, что поверхности F_1 и F_2 регулярны. Пусть $H_1(n)$ и $H_2(n)$ — значения опорных функций поверхностей в области ω; ω_1 — компонента множества ω, где $H_1 - H_2$ сохраняет знак, например, больше нуля. Рассмотрим поверхность, определяемую в области ω_1 вектор-функцией:

$$\bar{r} = \frac{n}{H_1(n) - H_2(n)} .$$

Эта поверхность имеет всюду неположительную гауссову кривизну. Она расположена внутри конуса, проектирующего область ω_1 из начала координат, и, не имея границы, очевидно, содержит эллиптические точки.

Теорема 2. *Если гауссова кривизна $K(n)$ выпуклой поверхности F как функция нормали n регулярна (k раз дифференцируема,*

$k \geqslant 3$) *и положительна, то поверхность регулярна (по крайней мере $k+1$ раз дифференцируема).*

Докажем регулярность поверхности F в окрестности произвольной точки с нормалью n_0. Не ограничивая общности, будем считать, что n_0 имеет направление положительной полуоси z. Пусть $H(x, y, z)$ — опорная функция поверхности F, $h(x, y)$ — решение уравнения

$$h_{xx}h_{yy} - h_{xy}^2 = \frac{1}{K(x, y)\,(1 + x^2 + y^2)^2}$$

($K(x, y)$ — гауссова кривизна поверхности F в точке с нормалью направления $(x, y, 1)$) в круге $x^2 + y^2 \leqslant \varepsilon^2$, принимающее на окружности круга значения $H(x, y, 1)$. Функция $zh\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)$ является опорной функцией $k+1$ раз дифференцируемой поверхности F_1 (лемма 2), которая в точке с нормалью направления $(x, y, 1)$ имеет кривизну $K(x, y)$, вместе с тем на конусе $x^2 + y^2 = \varepsilon^2 z^2$ она совпадает с $H(x, y, z)$. По теореме 1, поверхность F совпадает с F_1, что и доказывает регулярность F.

Теорема 3. *Пусть ω — любая выпуклая область на единичной сфере, $K(n)$ — любая непрерывная положительная функция в области ω и $H(n)$ — любая непрерывная функция на границе области ω. Тогда существует и притом единственная выпуклая поверхность F, сферическое изображение которой — область ω, гауссова кривизна поверхности F в точке с нормалью n равна $K(n)$, а опорная функция ее на границе сферического изображения ω равна $H(n)$.*

Соответствующая теорема для многогранников доказана в работе ([3]). Теорема 3 получается из нее предельным переходом.

Теорема 4. *Краевая задача для уравнения (1) разрешима для любой выпуклой области G, для любой k раз дифференцируемой ($k \geqslant 3$) функции $\varphi(x, y) > 0$ и для любой непрерывной функции ψ, заданной на границе области. Задача имеет всегда два решения. Оба решения суть $k+1$ раз дифференцируемые функции.*

Эта теорема представляет собой аналитическую формулировку теоремы 3.

Поступило
24 I 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, **11** (1907). [2] Н. В. Ефимов, Усп. матем. наук, **3**, в. 2 (24), 47 (1948). [3] А. В. Погорелов, ДАН, **62**, № 2 (1948).