Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Д. МИЛЬМАН

ГРАНЕВАЯ СТРУКТУРА ВЫПУКЛОГО БИКОМПАКТА И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ СРЕДНИХ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 I 1952)

I. К задаче интегрирования в произвольном топологическом пространстве. Результаты этого пункта являются вспомогательными для пункта V этой статьи. Ниже мы будем пользоваться топологическими понятиями и результатами по статье (1).

Пусть M обозначает топологическое пространство и $\{M_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ — конечное покрытие M. Если $n>1$ и при $1\leqslant k<n$ нельзя указать k элементов покрытия, также образующих покрытие M, то назовем $\{M_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ приведенным покрытием M и n — числом этого покрытия. Очевидно, если элементы некоторого конечного покрытия отличны от M, то можно выделить несколько элементов этого покрытия так, чтобы они образовали приведенное покрытие M.

Множество $\bigcup\limits_{i\neq j}(M_i\cap M_j)$ назовем границей приведенного канонического покрытия $\{M_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ пространства M.

Теорема 1. *Во всякое приведенное и замкнутое покрытие $\{F_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ можно вписать приведенное каноническое покрытие $\{M_j\}_{1\leqslant j\leqslant n}$ с границей F так, чтобы выполнялось*

$$F\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}(\overline{\mathfrak{G}_j^0}-\mathfrak{G}_j^0),$$

где $\mathfrak{G}_j^0$ есть любое открытое множество с замыканием, равным F_j $(1\leqslant j\leqslant n)$.

Если вещественная функция $f(x)$ на M и положительное число ε таковы, что колебание $f(x)$ меньше ε на канонически замкнутых множествах приведенного канонического покрытия Z пространства M, то мы назовем Z (f,ε)-каноническим покрытием M.

Из теоремы 1 легко вытекают следующие теоремы.

Теорема 1а. *Если вещественная функция $f(x)$ ограничена и непрерывна на топологическом пространстве M, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать (f,ε)-каноническое покрытие в M.*

Теорема 1б. *Если M — компакт, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать каноническое покрытие, диаметры элементов которого не превосходят числа ε („каноническое ε-покрытие“).*

Если $\sigma(I)$ есть неотрицательная нормированная и вполне аддитивная функция множеств на борелевском теле пространства M*, то теорему 1а можно усилить, а именно:

---

* Имеется в виду борелевское тело, содержащее систему замкнутых множеств.

Для всякой ограниченной вещественной и непрерывной на M функции $f(x)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое (f, ε)-каноническое покрытие Z, граница F которого имеет σ-меру, равную нулю $(\sigma(F) = 0)$; такое покрытие Z назовем (σ, f, ε)-покрытием M.

(σ, f, ε)-покрытию $\{M_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$ пространства M поставим в соответствие сумму $\sum\limits_{j=1}^{n} f(x_j)\sigma(M_j)$, где $x_j \in M_j$, $1 \leqslant j \leqslant n$; такую сумму назовем канонической ε-суммой (функции $f(x)$ относительно меры $\sigma(I)$).

Имеет место неравенство:

$$\left| \int\limits_M f(x)\, d\sigma(I_x) - \Sigma_0 \right| < \varepsilon,$$

где Σ_0 есть любая каноническая ε-сумма и $\int\limits_M f(x)\, d\sigma(I_x)$ обозначает интеграл Радона функции $f(x)$ относительно $\sigma(I)$.

Если M есть компакт, то этот результат можно усилить, заменив (f, ε)-каноническое покрытие каноническим ε-покрытием, граница которого имеет σ-меру, равную нулю.

II. Различные топологии в множестве экстремальных точек выпуклого бикомпакта. Пусть K обозначает выпуклый функционально-определенный бикомпакт с множеством R определяющих (вещественных) функций [2,3]. Равенство $f_0 = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j$, где $\alpha_j \geqslant 0$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$ и $\{f_j\}_{0 \leqslant j \leqslant n} \subset K$, понимается в том смысле, что $x(f_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x(f_j)$ при всех $x \in R$.

Если $f_0 = \alpha f_1 + \beta f_2$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha + \beta = 1$, то будем говорить, что f_1 и f_2 подчинены f_0.

Множество $M \subseteq K$ назовем граневым в K, если оно замкнуто и вместе с каждой своей точкой содержит все подчиненные ей точки K; выпуклое граневое множество, непустое и отличное от K, будем называть обобщенной гранью K.

Доказывается, что граневое множество совпадает с некоторым замкнутым множеством, являющимся объединением некоторой совокупности обобщенных граней. Таким образом, граневое множество можно определить, если уже дано определение обобщенной грани.

Точка $f_0 \in K$, не имеющая подчиненных точек в K, называется экстремальной точкой K. Пересечение граневого множества с множеством A всех экстремальных точек K назовем γ-замкнутой частью A.

Теорема 2. *Система γ-замкнутых частей A годится в качестве системы всех замкнутых множеств некоторой топологии в A („γ-топология“). В γ-топологии множество A является бикомпактным пространством с T_1-аксиомой отделимости.*

В дальнейшем будет удобным считать, что множество R-функций является линейным и содержащим все константы.

Так же как в статье [4], можно ввести понятия „точной грани“ и „экстремальной грани“ K (и верны соответствующие теоремы). Так же как с помощью обобщенной грани K вводятся понятия γ-замкнутой части и γ-топологии в A, с помощью точной (и экстремальной) грани можно ввести понятия „δ-замкнутой части A“ (и „ε-замкнутой части A“) и „δ-топологии“ — если R сепарабельно и полно („ε-топологии“ — без ограничений на R). При этом множество A оказывается бикомпактным (но без аксиом отделимости) в δ-топологии и в ε-топологии*.

III. Индуцирование мер в множество экстремальных точек. Пусть $\sigma(I)$ обозначает функцию, определенную и неотрицательную на борелевском теле B множеств топологического пространства Γ и нормированную условиями $\sigma(\Gamma)=1$; $\sigma(\Lambda)=0$. Пусть $I\subseteq\Gamma$. Если $\sigma(I)=\inf\limits_{I\subseteq\mathfrak{G}}\sigma(\mathfrak{G})$, где $\mathfrak{G}$ пробегает всевозможные открытые множества в Γ, то говорят, что $\sigma(I)$ есть нормированная мера на Γ. Если $\sigma(I)=\inf\limits_{I\subseteq J\in B}\sigma(J)$, то будем говорить, что $\sigma(I)$ есть общая нормированная мера на Γ.

Пусть Γ обозначает замыкание (в K) множества A экстремальных точек K („T-граница K“). Имеет место теорема:

Теорема 3. *Каждая нормированная мера $\sigma(I)$ на Γ порождает общую нормированную меру $\sigma_{\text{н}}(I)$ в γ-топологии на A. Значение меры $\sigma_{\text{н}}(I)$ на любой γ-замкнутой части A совпадает со значением $\sigma(\bar{I})$ на замыкании $\bar{I}$ (в топологии K) множества I. Этим мера $\sigma_{\text{н}}(I)$ определена однозначно.*

Аналогичная теорема верна в δ-топологии.

IV. Выделение минимально-достаточных множеств. Пусть $F\subseteq K$ и $M\subseteq K$. Мы скажем, что F является множеством достаточным на M, если выпуклая бикомпактная оболочка K_F множества F содержит M; если $F\subseteq\Gamma$ ($F\subseteq A$) замкнуто в топологии K (либо в γ-, δ-, ε-топологии) и не содержит правильной части, замкнутой в соответствующей топологии и достаточной на M, то будем говорить, что F является минимально-достаточным множеством на M в топологии K (соответственно, в γ-, δ-, ε-топологии).

Теорема 4. *Пусть $F\subseteq\Gamma$ и $M\subseteq K$. Если F замкнуто в топологии K и достаточно на M, то F содержит, по крайней мере, одно множество $\Gamma(M)$ минимально-достаточное на M в топологии K.*

Замечание. Аналогичные теоремы верны в γ-, δ-, ε-топологиях множества A.

Если M состоит из одной точки $f_0\in K$, то $\Gamma(M)$ (теоремы 4) обозначим $\Gamma(f_0)$ и назовем Γ-минимумом точки f_0; в γ-, δ-, ε-топологиях получаем γ-минимум, δ-минимум и ε-минимум точки f_0. Теорема 4 и замечание к ней утверждают существование таких минимумов для любой точки $f_0\in K$; из определения видно, что выпуклая бикомпактная оболочка минимума точки f_0 является аналогом симплекса с „внутренней точкой“ f_0.

V. Интегральные разложения R-средних. Точке $f_0\in K$ отвечает функционал $f_0(x)$ на R по формуле $f_0(x)=x(f_0)$, $x\in R$. При этом $f_0(x)$ является линейным функционалом на R, неотрицательным на неотрицательных функциях $x\in R$ и равным 1 на функции $e(f)\equiv 1$ ($f\in K$). Такой функционал мы назовем R-средним (в данном случае на K).

Совокупность R-средних на Γ совпадает с K и *каждому R-среднему $f_0(x)$ отвечает нормированная мера $\sigma_0(I)$ на Γ-минимуме $\Gamma(f_0)$ точки f_0 такая, что*:

$$f_0(x)=\int\limits_{\Gamma(f_0)} f(x)\,d\sigma_0(I_f),\qquad x\in R, \tag{*}$$

где интеграл, понимаемый как „среднее значение“ А. А. Маркова ([5]), совпадает здесь также с интегралом Радона; при этом мера $\sigma_0(I)$ положительна на непустых и открытых подмножествах $\Gamma(f_0)$.

* При несепарабельном, но полном R совокупность δ-замкнутых частей A вводит в A топологию в смысле А. Д. Александрова ([7]).

В силу результатов пункта I этой статьи $f_0(x)$ может рассматриваться как предел канонических ε-сумм на $\Gamma(f_0)$. Поэтому важна следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть F обозначает канонически замкнутое и непустое подмножество Γ-минимума $\Gamma(f_0)$ точки $f_0 \in K$. Обозначим $f_F = \frac{1}{\sigma_0(F)} \int\limits_F f\, d\sigma_0(I_f)$, где $\sigma_0(I)$ есть мера, взятая из формулы $(*)$. Тогда множество F является Γ-минимумом точки f_F.*

Таким образом, приходим к основному выводу:

Точка $f_0 \in K$ допускает интегральное разложение на $\Gamma(f_0)$, в котором элементарными множествами итегрирования служат Γ-минимумы.

Для получения аналогичного интегрального разложения точки $f_0 \in K$ на множестве A экстремальных точек (например, в γ-топологии) мы должны заменить меру $\sigma_0(I)$ общей нормированной мерой $\sigma_н(I)$ на A и затем рассматривать интеграл Радона для функций, непрерывных на A в γ-топологии относительно меры $\sigma_н(I)$. Как и раньше, можно функционал $f_0(x)$ рассматривать как предел канонических ε-сумм (в γ-топологии, для функций, непрерывных в этой топологии).

Пространство $C_{\widetilde{A}}$ вещественных функций, непрерывных на A в γ-топологии, является подпространством пространства C_A функций ограниченных, вещественных и непрерывных на A в топологии K. Поэтому интеграл Радона $\int\limits_{\widetilde{A}} f\, d\sigma_н(I_f)$, как среднее значение на $C_{\widetilde{A}}$, может быть расширен до среднего значения на C_A*.

Отсюда вытекает, что, отправляясь от любой общей нормированной меры $\sigma(I)$ в γ-топологии на A, можно указать нормированную меру $\sigma_1(I)$ на Γ так, чтобы выполнялось

$$\int\limits_{\widetilde{A}} f(y)\, d\sigma(I_f) = \int\limits_{\Gamma} f(\widetilde{y})\, d\sigma_1(I_f),$$

где $y \in C_{\widetilde{A}}$ и $\widetilde{y}$ есть однозначное непрерывное доопределение y на Γ.

Поступило
14 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Усп. матем. наук, 2, 1 (17) (1947). [2] Д. Мильман, ДАН, 59, № 6 (1948). [3] Д. Мильман, ДАН, 57, № 2 (1947). [4] Д. П. Мильман и М. А. Рутман, ДАН, 60, № 1 (1948). [5] А. Марков, Матем. сборн., 4 (46) : 1 (1938). [6] М. Г. Крейн и М. А. Рутман, Усп. матем. наук, 3, 1 (23) (1948). [7] А. Д. Александров, Матем. сборн., 8 (50), 307 (1940).

* См., например, ([6]).