

Б. М. ЛЕВИТАН

**О ПОЛНОТЕ КВАДРАТОВ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 I 1952)

1. Г. Борг <sup>(1)</sup> в связи с изучением обратной задачи Штурма—Лиувилля доказал ряд теорем о полноте квадратов собственных функций. В настоящей заметке мы показываем, что некоторые из этих теорем просто следуют из теории операторов обобщенного сдвига.

Пусть  $q(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) — действительная функция, суммируемая в каждом конечном интервале. Обозначим через  $h$  произвольное действительное число и через  $\omega_h(x, \lambda)$  решение уравнения

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = 0, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$\omega_h(0, \lambda) = 1, \quad \omega'_h(0, \lambda) = h. \tag{2}$$

Если  $h = \infty$ , то под  $\omega_h(x, \lambda)$  мы понимаем решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям  $\omega_h(0, \lambda) = 0, \omega'_h(0, \lambda) = 1$ . Мы ограничимся изучением случая  $h \neq \infty$ . Случай  $h = \infty$  разбирается аналогично.

Как показано в <sup>(4)</sup>, существует такая непрерывная функция  $w_h(x, y, t)$ , что

$$\begin{aligned} \omega_h(x, \lambda) \omega_h(y, \lambda) &= \frac{1}{2} \{ \omega_h(x+y, \lambda) + \omega_h(x-y, \lambda) \} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{x-y}^{x+y} w_h(x, y, t) \omega_h(t, \lambda) dt. \end{aligned}$$

Полагая в этой формуле  $x = y$ , мы получим

$$\omega_h^2(x, \lambda) = \frac{1}{2} \omega_h(2x, \lambda) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_h(x, t) \omega_h(t, \lambda) dt, \tag{3}$$

где положено  $K_h(x, t) = w_h(x, x, t)$ .

Обозначим через  $H$  произвольное действительное число и через  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  — корни уравнения  $\omega'_h(\pi, \lambda) + H\omega_h(\pi, \lambda) = 0$ .

**Теорема 1.** Пусть  $f(x) \in L(0, \pi/2)$ . Если для всех  $n$

$$\int_0^{\pi/2} f(x) \omega_h^2(x, \lambda_n) dx = 0,$$

то почти всюду  $f(x) = 0$ .

**Доказательство.** Из формулы (3) следует

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi/2} f(x) \left\{ \frac{1}{2} \omega_h(2x, \lambda_n) + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_h(x, t) \omega_h(t, \lambda) dt \right\} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \\ &= \int_0^{\pi} F_h(x) \omega_h(x, \lambda_n) dx + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} f(x) dx, \end{aligned}$$

причем  $F_h(x) = \frac{1}{4} f\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{x/2}^{\pi/2} K_h(t, x) f(t) dt$ .

При  $n \rightarrow \infty \int_0^{\pi} F_h(x) \omega_n(x, \lambda_n) dx \rightarrow 0$ . Поэтому  $\int_0^{\pi/2} f(x) dx = 0$ . Следовательно,

$$\int_0^{\pi} F_h(x) \omega_n(x, \lambda_n) dx = 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

и, значит, в силу полноты собственных функций задачи Штурма — Лиувилля, почти всюду  $F_h(x) = 0$ , а значит, почти всюду  $f(x) = 0$ .

2. Допустим, что  $q(\pi - x) = q(x)$  и  $H = h$ . Покажем, что в этом случае  $\omega_n^2(x, \lambda_n)$  образуют полную систему в пространстве функций  $f(x)$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ), удовлетворяющих условию  $f(\pi - x) = f(x)$ . В самом деле, легко видеть, что функция  $\psi_h(x, \lambda_n) = \omega_n(\pi - x, \lambda_n)$  есть решение уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям

$$\psi_h'(0, \lambda_n) - h\psi_h(0, \lambda_n) = 0, \quad \psi_h'(\pi, \lambda_n) + h\psi_h(\pi, \lambda_n) = 0.$$

Поэтому  $\psi_h(x, \lambda_n) = \omega_n(\pi - x, \lambda_n) = \alpha_n \omega_n(x, \lambda_n)$ . Покажем, что  $\alpha_n^2 = 1$  и, значит,  $\omega_n^2(\pi - x, \lambda_n) = \omega_n^2(x, \lambda_n)$ .

В самом деле, полагая  $x = \pi/2$ , мы получим  $\omega_n(\pi/2, \lambda_n) = \alpha_n \omega_n(\pi/2, \lambda_n)$ . Если  $\omega_n(\pi/2, \lambda_n) \neq 0$ , то из последнего равенства следует  $\alpha_n = 1$ . Если  $\omega_n(\pi/2, \lambda_n) = 0$ , то  $\omega_n'(\pi/2, \lambda_n) \neq 0$ . Дифференцируя равенство  $\omega_n(\pi - x, \lambda_n) = \alpha_n \omega_n(x, \lambda_n)$ , получим  $-\omega_n'(\pi - x, \lambda_n) = \alpha_n \omega_n'(x, \lambda_n)$ . Полагая  $x = \pi/2$ , получим  $\alpha_n = -1$ .

Пусть теперь  $f(\pi - x) = f(x)$  и для всех  $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^{\pi} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx = 0.$$

Покажем, что в этом случае  $f(x) = 0$  почти всюду. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx &= \int_0^{\pi/2} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx + \int_{\pi/2}^{\pi} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx + \int_0^{\pi/2} f(\pi - x) \omega_n^2(\pi - x, \lambda_n) dx = \\ &= 2 \int_0^{\pi/2} f(x) \omega_n^2(x, \lambda_n) dx = 0. \end{aligned}$$

Поэтому из теоремы 1 следует  $f(x) = 0$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ), и, значит, в силу условия  $f(\pi - x) = f(x)$ ,  $f(x) = 0$  в интервале  $(0, \pi)$ .

3. Положим  $\chi_h(x, \lambda_n) = \omega_n^2(x, \lambda_n) - 1/2$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ). Легко указать последовательность функций, биортогональную к последовательности  $\chi_h(x, \lambda_n)$ . Пусть  $g(t) \in L_2(0, \pi)$ . Обозначим через  $A_{2x}$  оператор, определяемый равенством  $A_{2x} g(t) = \frac{1}{2} g(2x) + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_h(x, t) g(t) dt$ .

\*  $\omega_n(x, \lambda_n)$  есть решение уравнения (1). Если  $\omega_n(\pi/2, \lambda_n) = \omega_n'(\pi/2, \lambda_n) = 0$ , то, в силу единственности решения,  $\omega_n(x, \lambda_n) \equiv 0$ .

\*\* Из теоремы Штурма следует, что  $\alpha_n = (-1)^{n-1}$ .

Формулу (3) можно сокращенно записать так:

$$\chi_h(x, \lambda_n) = A_{2x} \varphi(t, \lambda_n). \quad (4)$$

Обращая формулу (4), мы получим

$$\varphi(2x, \lambda_n) = A_{2x}^{-1} \chi_h(t, \lambda_n) \quad (0 \leq x \leq \pi/2).$$

Обозначим через  $A_{2x}^*$  оператор, сопряженный к оператору  $A_{2x}$ , и положим  $\mu_h(x, \lambda_n) = \{A_{2x}^*\}^{-1} \varphi(t, \lambda_n) \quad (0 \leq x \leq \pi/2)$ .

Покажем, что  $\{\chi_h(x, \lambda_n); \mu_h(x, \lambda_n)\}$  образуют биортогональную систему. В самом деле,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \chi_h(x, \lambda_n) \mu_h(x, \lambda_m) dx &= \int_0^{\pi/2} A_{2x} \{\varphi(t, \lambda_n)\} \{A_{2x}^*\}^{-1} \{\varphi(t, \lambda_m)\} dx = \\ &= \int_0^{\pi/2} \varphi(2x, \lambda_n) \varphi(2x, \lambda_m) dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \varphi(x, \lambda_n) \varphi(x, \lambda_m) dx = 0, \end{aligned}$$

если  $n \neq m$ .

Из существования биортогональной последовательности следует, что система функций  $\chi_h(x, \lambda_n)$  в  $L_2(0, \pi/2)$  минимальна, а из доказательств теоремы 1 следует, что эта система в  $L(0, \pi/2)$  полна.

4. Если в уравнении (1) коэффициент  $q(x)$  имеет в интервале  $(0, \pi)$  ограниченную производную, то имеет место более сильная теорема, чем теорема 1.

*Теорема 2. Если  $q(x)$  имеет ограниченную производную в интервале  $0 \leq x \leq \pi$ , а  $f(x)$  имеет ограниченную производную в интервале  $0 \leq x \leq \pi/2$ , то можно указать последовательность чисел  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$  так, что  $\sum_n |c_n| < \infty$  и*

$$f(x) = \sum_n c_n \chi_h(x, \lambda_n) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

*Доказательство.* Обозначим через  $\varphi(x)$  решение интегрального уравнения

$$f(x) = \frac{1}{2} \varphi(2x) + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_h(x, t) \varphi(t) dt \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right). \quad (5)$$

Из вида решения уравнения Вольтерра следует, что если  $f(x)$  имеет ограниченную производную в интервале  $0 \leq x \leq \pi/2$ , то  $\varphi(t)$  имеет ограниченную производную в интервале  $0 \leq t \leq \pi$ . Поэтому из теоремы разложения по собственным функциям уравнения Штурма — Лиувилл следует (см. (5), стр. 372)

$$\varphi(t) = \sum_n c_n \omega_h(t, \lambda_n),$$

причем  $\sum_n |c_n| < \infty$ . Подставляя это разложение в интегральное уравнение (5), мы получим

$$f(x) = \sum_n c_n \chi_h(x, \lambda_n) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right),$$

что и требовалось доказать.

5. Функции  $\omega_h^2(x, \lambda_n)$  образуют также полную систему в интервале  $(\pi/2, \pi)$ . Для доказательства этого утверждения выведем формулу для  $\omega_h^2(x + \pi/2, \lambda_n)$  ( $0 \leq x \leq \pi/2$ ).

Обозначим через  $\Omega_H(x, \lambda)$  решение уравнения (1), удовлетворяющее начальным условиям  $\Omega_H(\pi, \lambda) = 1$ ,  $\Omega_H'(\pi, \lambda) = -H$ . Для того чтобы задавать начальное условие не в точке  $x = \pi$ , а в точке  $x = 0$ , рассмотрим вспомогательное уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(\pi - x)\} y = 0. \quad (6)$$

Очевидно, что функция  $\zeta_H(x, \lambda) = \Omega_H(\pi - x, \lambda)$  есть решение уравнения (6), удовлетворяющее начальным условиям  $\zeta_H(0, \lambda) = 1$ ,  $\zeta_H'(0, \lambda) = H$ . Поэтому имеет место формула, аналогичная формуле (3):

$$\zeta_H^2(x, \lambda) = \frac{1}{2} \zeta_H(2x, \lambda) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_H^*(x, t) \zeta_H(t, \lambda) dt \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right).$$

Вспоминая, что  $\zeta_H(x, \lambda) = \Omega_H(\pi - x, \lambda)$ , мы получим

$$\Omega_H^2(\pi - x, \lambda) = \frac{1}{2} \Omega_H(\pi - 2x, \lambda) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{2x} K_H^*(x, t) \Omega_H(\pi - t, \lambda) dt.$$

Заменяя в этой формуле  $\pi - x$  на  $\pi/2 + x$  и  $\pi - t$  на  $t$ , мы получим

$$\begin{aligned} & \Omega_H^2\left(x + \frac{\pi}{2}, \lambda\right) = \\ & = \frac{1}{2} \Omega_H(2x, \lambda) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int_{2x}^{\pi} K_H^{**}(x, t) \Omega_H(t, \lambda) dt \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right), \quad (7) \end{aligned}$$

где  $K_H^{**}(x, t) = K_H^*(\pi/2 - x, \pi - x)$ .

Если  $\lambda_n$  есть собственное значение уравнения (1) при граничных условиях  $y'(0) - hy(0) = 0$ ,  $y'(\pi) + Hy(\pi) = 0$ , то очевидно, что как  $\omega_h(x, \lambda_n)$ , так и  $\Omega_H(x, \lambda_n)$  суть собственные функции. Поэтому  $\omega_h(x, \lambda_n) = \alpha_n \Omega_H(x, \lambda_n)$ , где  $\alpha_n$  — постоянные числа. Следовательно, из формулы (7) следует

$$\omega_h^2\left(x + \frac{\pi}{2}, \lambda_n\right) = \alpha_n \left\{ \frac{1}{2} \omega_h(2x, \lambda_n) + \frac{\alpha_n}{2} + \frac{1}{2} \int_{2x}^{\pi} K_H^{**}(x, t) \omega_h(t, \lambda_n) dt \right\}. \quad (8)$$

Из формулы (7) (или (8)) следует полнота квадратов собственных функций в интервале  $(\pi/2 \leq x \leq \pi)$ .

Замечание. Пользуясь тем же методом, с помощью которого мы доказали теорему 1, можно доказать следующую теорему Борга (6, 7):

*Если  $q(\pi - x) = q(x)$  и  $H = h$ , то функция  $q(x)$  однозначно определяется одним спектром собственных значений.*

Поступило  
21 I 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> G. Borg, Acta Math., 81, 3—4, 265 (1949). <sup>2</sup> В. А. Марченко, ДАН, 72, № 3 (1950).  
<sup>3</sup> И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан, Изв. АН СССР, сер. матем., 15, № 4 (1951). <sup>4</sup> Б. М. Левитан, Усп. матем. наук, 4, в. 1 (1949). <sup>5</sup> Э. Л. Айнс, Обыкновенные дифференциальные уравнения, 1939. <sup>6</sup> G. Borg, Acta Math., 78, 1—2 (1946). <sup>7</sup> N. Levinson, Math. Tidsskr., B. (1949).