Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 3

МАТЕМАТИКА

Е. М. ЛАНДИС

# О ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 28 I 1952)

Вопрос о единственности решения задачи Коши для линейных уравнений с частными производными при неаналитических коэффициентах в случае двух независимых переменных был наиболее полно исследован Карлеманом, а именно, им доказано [1], что всякая система $\frac{\partial u_p}{\partial x} + \sum_{q=1}^{n} A_{pq} \frac{\partial u_q}{\partial y} + \sum_{q=1}^{n} B_{pq} u_q = 0$ $(p = 1, 2, \ldots, n)$, где $A_{pq}$ дифференцируемы и их частные производные удовлетворяют условию Гельдера, имеет единственное решение задачи Коши, если только корни детерминанта $|A_{pq} - \lambda\delta_{pq}|$ все различны.

Таким образом, эта весьма общая теорема не охватывает случая параболической системы. В 1947 г. А. Д. Мышкисом [2] был построен пример параболической системы, для которой единственность не имела места. Однако коэффициенты уравнений этой системы были существенно не гладкими (не удовлетворяли условию Липшица), и оставался открытым вопрос о единственности при условии достаточной гладкости коэффициентов даже в случае одного параболического уравнения простейшего вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{1}$$

В этой заметке доказывается единственность решения задачи Коши для уравнения (1) в классе дважды дифференцируемых функций. Коэффициент $a(x,y)$ есть функция постоянного знака, ограниченная и удовлетворяющая условию Липшица по переменному $y$.

**Теорема.** *Пусть $u(x,y)$ — функция двух переменных, заданная на квадрате $Q = (0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1)$, дважды дифференцируемая на этом квадрате и удовлетворяющая на нем уравнению (1), где $a(x, y)$ неотрицательна (неположительна), ограничена и удовлетворяет условию Липшица по $y$. Пусть, далее, $u(0, y) = 0$ и $\partial u(0, y)/\partial x = 0$ $(0 \leqslant y \leqslant 1)$.*

*Тогда $u(x,y) \equiv 0$ на $Q$.*

Доказательство теоремы проводится с помощью следующих лемм.

Лемма 1 (принцип максимума). *Пусть дважды дифференцируемая функция $u(x, y)$ задана на области $G$, ограниченной осью $y$, двумя прямыми, параллельными оси $x$: $y = y_1$ и $y = y_2$ $(y_1 < y_2)$ и континуумом $L$, удовлетворяет уравнению (1), обращается в нуль на* *оси $y$ и принимает постоянное значение на $L$. Пусть $E_z$ — множество уровня $v = z$ функции $v$. Пусть, далее, множество $E$ не содержит точек, где* $\operatorname{grad} v = 0$.

*Тогда всякая компонента $K$ множества уровня $E_z$ есть либо простая дуга с концами, соответственно, на прямых $y = y_1$ и $y = y_2$ такая, что всякая прямая, параллельная оси $x$ и расположенная между прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$, пересекает $K$ по точке или по отрезку, либо $K$ есть простая дуга с обоими концами на прямой $y = y_1$ и существует $y_0$, $y_1 < y_0 < y_2$, такое, что всякая прямая $y = y^*, y_1 < y^* < y_0$, имеет в пересечении с $K$ две компоненты и никакая прямая $y = y^{**}$, $y^{**} > y_0$, не пересекает $K$ (рис. 1). (Если в уравнении (1) $a(x, y)$ отрицательно, то роли прямых $y = y_1$ и $y = y_2$ меняются.)*

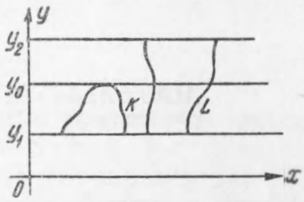

Рис. 1

Определение. Скажем, что континуум $M$ униформен относительно прямой $l$, если всякое непустое пересечение прямой $m$, перпендикулярной $l$, с континуумом $M$ содержит ровно одну компоненту.

Лемма 2. *Пусть $G$ — область, ограниченная континуумами $L_1$ и $L_2$, униформными относительно оси $y$, и отрезками $i_1$ и $i_2$ соответственно прямых $y = y_1$ и $y = y_2$. Пусть, для определенности, прямые, параллельные оси $x$, пересекают сначала континуум $L_1$, а затем $L_2$ (см. рис. 2). Пусть $y_2 - y_1 = h$ $(y_2 > y_1)$, а область $G$ целиком помещается в квадрате со стороной $k = {}^1/_{1024}$ и площадь $s$ области $\overline{G}$ не превосходит $h^2$. Пусть, далее, на области $\overline{G}$ задана дважды дифференцируемая функция $v$, удовлетворяющая уравнению (1). Пусть на континууме $L_1$ функция $v$ вместе со своей производной $\partial v / \partial x$ обращается в нуль, а на $L_2$ $v \equiv v_0 \geqslant 0$. Пусть, далее, $|v(x, y)| \leqslant v_0$ при $(x, y) \in G$.*

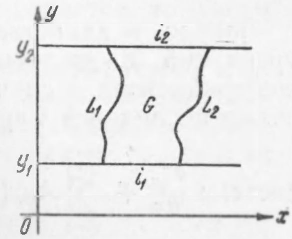

Рис. 2

*Тогда $v_0 = 0$.*

Лемма 3. *Пусть область $G$ предыдущей леммы разделена на две части $G_1$ и $G_2$ простой дугой $L_3$ с концами, соответственно, на отрезках $i_1$ и $i_2$ (см. рис. 3).*

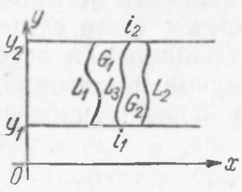

Рис. 3

*Пусть на $\overline{G}$ задана дважды дифференцируемая функция $v$, удовлетворяющая условиям: 1) $v \equiv 0$ на $L_1$; 2) $v \equiv v_0 \geqslant 0$ на $L_2$; 3) $v \leqslant 0$ на $G_1$; 4) $v > -v_0$ на $G$; 5) функция $v$ удовлетворяет уравнению (1).*

*Тогда, если площадь $G$ $s \leqslant h^2$, то $v_0 = 0$.*

Лемма 4. *Пусть имеется область $G$ леммы 2. Обозначим через $\widetilde{G}$ область, заключенную между $L_1$, континуумом $L_0$, униформным относительно оси $y$, расположенным левее $L_1$, и прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$ (рис. 4). Мы предполагаем при этом, что $L_1$ целиком лежит правее оси $y$.*

*Положим $D = \widetilde{G} + G$, и пусть на $\overline{D}$ задана дважды дифференцируемая функция $v$, удовлетворяющая условиям: 1) $v \equiv v_0 \geqslant 0$ на $L_2$; 2) $v \equiv \frac{v_0}{2}$ на $L_1$; 3) $v \equiv \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0$ на $L_0$; 4) $v > -v_0$ на $D$; 5) $v$ удовлетворяет уравнению (1).*

*Тогда, если площадь $G$ $s \leqslant h^2$, то $v_0 = 0$.*

Доказательства лемм 2, 3 и 4 сходны между собой и заключаются в том, что в области $G$ (в лемме 4 — в области $D$) выбирается подходящим образом некоторая меньшая область $G^*$, в которой левая и правая части уравнения интегрируются повторно по $x$ и затем по $y$. При этом предположение $v_0 > 0$ приводит к тому, что такой интеграл от левой части уравнения оказывается больше, чем интеграл от правой части.

Из леммы 3 вытекает лемма 5.

Лемма 5. *Пусть области $G$, $G_1$, $G_2$, континуумы $L_1$, $L_2$, $L_0$, число $h$ и отрезки $i_1$ и $i_2$ имеют тот же смысл, что и в лемме 3, с тем лишь отличием, что предполагается, что площадь $s$ области $G$ не превосходит $h^2/4$. Пусть концы $L_3$ делят отрезки $i_1$ и $i_2$, соответственно, на отрезки $i_{11}$, $i_{12}$ и $i_{21}$, $i_{22}$.*

*Пусть, далее, на $\bar{G}$ задана дважды дифференцируемая функция $v$, подчиненная условиям: 1) $v \equiv 0$ на $L_1 + L_2 + L_3$; 2) на отрезке $i_{11}$ имеется точка, где $v < 0$, а на отрезке $i_{12}$ имеется точка, где $v > 0$; 3) $v$ удовлетворяет уравнению (1).*

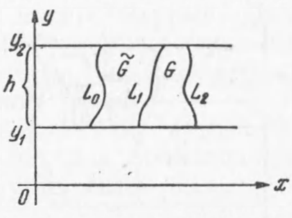


Рис. 4

*Тогда, если мы обозначим через $m_1$ и $m_2$ минимумы функции $v$ соответственно на $i_{11}$ и $i_{21}$, а через $M_1$ и $M_2$ — максимумы $v$ соответственно на $i_{12}$ и $i_{22}$, то будем иметь $m_2 > m_1/2$ и $M_2 < M_1/2$.*

Доказательство теоремы. Допустим, что $u(x, y)$ — дважды дифференцируемая функция, заданная на $I$ и обращающаяся в нуль вместе со своей производной по $x$ на отрезке $[0, 1]$ оси $y$. Допустим, что внутри квадрата $I$ имеется точка $(x_0, y_0)$, в которой функция $u$ отлична от нуля. Пусть, для определенности, $u(x_0, y_0) > 0$. Тогда всякое множество уровня $E_z = \underset{(x,\,y)}{E}\{u(x, y) = z\}$ для $0 < z < u(x_0 y_0)$ отделяет в квадрате $I$ точку $(x_0 y_0)$ от отрезка $[0, 1]$ оси $y$. Заметим, что, пренебрегая множеством значений $z$ меры нуль, мы не можем считать, что всякое множество $E_z$ состоит из конечного числа гладких простых дуг (3). Следовательно, можно найти гладкую кривую $L$, принадлежащую множеству уровня $E_{z_0}$ $(z_0 > 0)$ и отделяющую точку $(x_0, y_0)$ от отрезка $[0, 1]$ оси $y$.

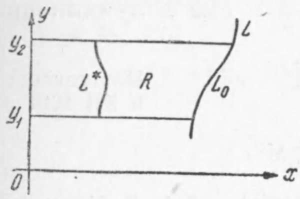


Рис. 5

Тогда, пользуясь леммой 1, можно выделить область $R$, ограниченную двумя прямыми, параллельными оси $x$, $y = y_1$ и $y = y_2$, отрезком $L_0$ кривой $L$ и континуумом $L^*$, соединяющим прямые $y = y_1$ и $y = y_2$. При этом континуум $L^*$ униформен относительно оси $y$ и функция $u$ обращается на $L^*$ в нуль вместе со своей производной по $x$ (рис. 5). При этом можно предположить, что область $R$ целиком помещается в квадрате со стороной $^1/_{1024}$ и, если положить $h = y_2 - y_1$ и обозначить через $s$ площадь $R$, то $s \leqslant {}^1/_{32} h^2$.

Обозначим через $\widetilde{L^*}$ ближайшую к $L^*$ компоненту пересечения множества уровня $E_{z_0}$ с $R$, имеющую концы соответственно на прямых $y = y_1$ и $y = y_2$. Пусть $R^*$ — область между $L^*$ и $\widetilde{L^*}$ и прямыми $y = y_1$ и $y = y_2$. Пусть $i$ есть пересечение прямой $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ с областью $R^*$.

Обозначим через $R^{**}$ часть $R^*$, расположенную выше интервала $i$. Пользуясь леммами 1, 2 и 5, мы показываем, что в $R^{**}$ существует гладкая униформная относительно оси $y$ кривая $L^{**}$ с концами на прямой $y = y_2$ и на отрезке $i$ (пусть $(x^*, y^*)$ — конец кривой $L^{**}$, лежащий на отрезке $i$), обладающая следующим свойством: в части $R^{**}$, расположенной левее $L^{**}$, $|u|$ не превосходит некоторого числа, которое мы обозначим через $z^*$, такого, что если обозначить через $n$ максимальное число точек, в которых $u$ попеременно равна $z^*$ и $-z^*$ на части отрезка $i$, лежащей правее точки $(x^*, y^*)$, то $|z^*| < z_0 / 2^n$.

Пусть $R^{***}$ — часть $R^{**}$, расположенная правее $L^{**}$ (рис. 6). Рассмотрим множества уровня $E_{z_0/2^k}$ и $E_{-z_0/2^k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Разобьем $R^{***}$ прямыми, параллельными оси $x$, на полосы максимальной ширины, либо не пересекающие одновременно оба множества уровня $E_{z_0/2^k}$ и $E_{-z_0/2^k}$, либо такие, что одно из этих множеств отделяет другое в полосе от оси $y$. Обозначим эти полосы $A_1^k, A_2^k, \ldots, A_r^k$. Число этих полос не превосходит $n$. Пусть $h_i^k$ — ширина $i$-й полосы. Рассмотрим компоненты пересечения множеств уровня $E_{z_0/2^k}$ (или $E_{-z_0/2^k}$) и $E_{z_0/2^{k+1}}$ $(E_{-z_0/2^{k+1}})$ с полосой $A_i^k$. Найдется по крайней мере по одной компоненте, принадлежащей как уровню $E_{z_0/2^k}$, так и $E_{z_0/2^{k+1}}$, которые будут соединять противоположные стороны полосы. Возьмем из них самую ближайшую к оси $y$ компоненту, принадлежащую $E_{z_0/2^k}$, и самую далекую от оси $y$ компоненту, принадлежащую $E_{z_0/2^{k+1}}$. Обозначим часть полосы между этими компонентами через $B_i^k$, а площадь ее — через $s_i^k$.

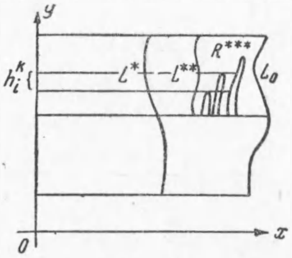


Рис. 6

По лемме 4, $s_i^k \geqslant h_i^{k^2}$, и так как $\sum\limits_{i=1}^{r} h_i^k = \frac{h}{2}$, то $\sum\limits_{i=1}^{r} s_i^k \geqslant \frac{h^2}{4r} \geqslant \frac{h^2}{4n}$.

Но никакие две области $B_i^k$ при всех $i$ и $k$ не пересекаются. Отсюда площадь $R^{***}$ должна превосходить $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{i=1}^{r} s_i^k \geqslant \frac{h^2}{4}$. Мы получили противоречие, доказывающее теорему.

Поступило
6 XII 1951

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Carleman, Ark. f. Mat., Astr., Fys., 26B:17 (1939). [2] А. Д. Мышкис, ДАН, 58, № 1 (1947). [3] А. С. Кронрод и Е. М. Ландис, ДАН, 58, № 7 (1947).