

ПРОБЛЕМА АНАМОРФОЗЫ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО И N -ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ
УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 111 1952)

Требуется решить систему N -функциональных уравнений

$$\begin{vmatrix} \varphi_1 a & \psi_1 a & \chi_1 a \\ \varphi_2 b & \psi_2 b & \chi_2 b \\ \varphi_3 u(a; b) & \psi_3 u(a; b) & \chi_3 u(a; b) \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \varphi_1 a & \psi_1 a & \chi_1 a \\ \varphi_2 b & \psi_2 b & \chi_2 b \\ \varphi_4 v(a; b) & \psi_4 v(a; b) & \chi_4 v(a; b) \end{vmatrix} = 0,$$

где $u = u(a; b)$, $v = v(a; b)$ — пара сопряженных гармонических функций. Полученные ниже критерии номографируемости уравнения (1,1) в комплексной области являются вместе с тем условиями совместности этой системы функциональных уравнений, а вся дальнейшая теория, с этой точки зрения, — эффективное решение этой системы функциональных уравнений.

1. Пусть $z = a + bi$, $w = p + qi$ и дана аналитическая зависимость

$$\Phi(w; z) = 0, \quad (1,1)$$

имеющая основные дифференциальные номографические параметры \bar{i} и \bar{j} (относительно переменной z) и \tilde{i} и \tilde{j} (относительно переменной w).

Теорема 1. Для того чтобы зависимость (1,1) была анаморфозируемой, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась одна из систем уравнений (1,2) или (1,3):

$$\bar{j}_{ab} = -\bar{j}\bar{j}_b, \quad \bar{i}_{ab} = \bar{i}\bar{i}_a, \quad (1,2)$$

$$\tilde{j}_{pq} = -\tilde{j}\tilde{j}_q, \quad \tilde{i}_{pq} = \tilde{i}\tilde{i}_p. \quad (1,3)$$

Теорема 2. Для того чтобы зависимость (1,1) была первого класса с z (соответственно w) прямолинейной переменной, необходимо и достаточно, чтобы имело место одно из уравнений (1,4) (соответственно (1,5))

$$\bar{j}_b = 0, \quad \bar{i}_a = 0, \quad (1,4)$$

$$\tilde{j}_q = 0, \quad \tilde{i}_p = 0. \quad (1,5)$$

Мы будем иметь нулевой, второй или четвертый жанр в зависимости от того, выполняются ли одновременно уравнения (1,4) и (1,5), или только уравнения (1,4), либо (1,5), или и (1,4) и (1,5) не имеют места, но выполняются уравнения (1,2).

2. Пусть дана аналитическая зависимость (1,1). Будем обозначать чертой сверху комплексную функцию, сопряженную с данной. Зависимость (1,1) определяет две явные аналитические функции

$$w = f(z), \quad z = F(w), \quad (2,1)$$

аналитические в областях, соответственно, G — плоскости z и \tilde{G} — плоскости w . Пусть далее:

$$\begin{aligned} \bar{w} = \overline{f(z)} = f_1(\bar{z}), \quad \bar{z} = \overline{F(w)} = F_1(\bar{w}), \quad \varphi = \varphi(z) = \frac{dw}{dz}, \\ \varphi_1 = \varphi_1(\bar{z}) = \frac{d\bar{w}}{d\bar{z}} = \bar{\varphi}, \quad \tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}(w) = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{\varphi}, \quad \tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\bar{w}) = \frac{d\bar{z}}{d\bar{w}} = \frac{1}{\varphi_1}, \end{aligned} \quad (2,2)$$

причем функции $\bar{w} = f_1(\bar{z})$, $\varphi_1 = \varphi_1(\bar{z})$ и $\bar{z} = F_1(\bar{w})$, $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_1(\bar{w})$ аналитичны, соответственно, в областях \tilde{G} и \tilde{G} , являющихся зеркальными отображениями в действительных осях плоскостей z и w соответственно областей G и \tilde{G} . Содержащиеся в равенствах (2,2) утверждения являются прямыми следствиями очевидных равенств $d\bar{w}/d\bar{z} = \overline{dw/dz}$ и $d\bar{z}/d\bar{w} = \overline{dz/dw}$. Пусть далее

$$\zeta = \frac{\varphi\varphi_1}{\sqrt{\varphi^2 - \varphi_1^2}}, \quad \eta = \ln \xi; \quad \tilde{\zeta} = \frac{\tilde{\varphi}\tilde{\varphi}_1}{\sqrt{\tilde{\varphi}^2 - \tilde{\varphi}_1^2}}, \quad \tilde{\eta} = \ln \tilde{\xi}. \quad (2,3)$$

Производя выкладки, последовательно найдем:

$$\begin{aligned} \tau = -i \frac{\varphi + \varphi_1}{\varphi - \varphi_1}, \quad \tilde{\tau} = -i \frac{\tilde{\varphi} + \tilde{\varphi}_1}{\tilde{\varphi} - \tilde{\varphi}_1} = i \frac{\varphi + \varphi_1}{\varphi - \varphi_1} = -\tau, \\ \xi = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1^2 - \varphi^2}}, \quad \tilde{\eta} = -\frac{1}{2} \ln(\varphi_1^2 - \varphi^2), \quad \tilde{j} = -[\ln(\varphi_1^2 - \varphi^2)]_p = 2\tilde{\eta}_p, \\ \tilde{i} = [\ln(\varphi_1^2 - \varphi^2)]_q = -2\tilde{\eta}_q, \end{aligned} \quad (2,4)$$

$$\begin{aligned} \bar{j} = \frac{2(\varphi^3\varphi_1' - \varphi_1^3\varphi')}{\varphi\varphi_1(\varphi^2 - \varphi_1^2)} = 2 \left(\ln \frac{\varphi\varphi_1}{\sqrt{\varphi^2 - \varphi_1^2}} \right)_a = 2\eta_a, \\ \bar{i} = \frac{2i(\varphi^3\varphi_1' + \varphi_1^3\varphi')}{\varphi\varphi_1(\varphi^2 - \varphi_1^2)} = -2 \left(\ln \frac{\varphi\varphi_1}{\sqrt{\varphi^2 - \varphi_1^2}} \right)_b = -2\eta_b. \end{aligned}$$

3. Лемма 1. Для того чтобы данная аналитическая зависимость (1,1) была первого номографического класса с заведомо прямолинейной комплексной переменной z или w , необходимо и достаточно, чтобы, соответственно: удовлетворялось уравнение

$$\eta_{ab} = 0, \quad (3,1)$$

и тогда η имеет вид

$$\eta = X(a) + Y(b), \quad (3,2)$$

или уравнение

$$\tilde{\eta}_{pq} = 0, \quad (3,3)$$

и тогда $\tilde{\eta}$ имеет вид

$$\tilde{\eta} = M(p) + N(q), \quad (3,4)$$

* Знаки \sim над буквой, например $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_1$ и т. д., означают просто другие функции, играющие сходную роль с функциями φ и φ_1 .

где $X(a)$, $Y(b)$, $M(p)$, $N(q)$ — некоторые функции, определенные с точностью до аддитивных постоянных.

Следствие. Если условия (3,1) и (3,3) имеют место одновременно, то зависимость будет нулевого жанра; в противном случае второго жанра. Заметим, что условия (3,1) и (3,3), очевидно, могут быть заменены условиями (3,2) и (3,4) и обратно.

Лемма 2. Для того чтобы (1,1) была первого номографического класса с заведомо прямолинейной комплексной переменной z или w , необходимо и достаточно, чтобы, соответственно, η или $\tilde{\eta}$ были решениями гиперболических уравнений колебаний струны, соответственно, (3,5) или (3,7):

$$\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (3,5)$$

и тогда η имеет вид

$$\eta = X(z + \bar{z}) + Y(z - \bar{z}); \quad (3,6)$$

или

$$\tilde{\eta}_{ww} - \tilde{\eta}_{\bar{w}\bar{w}} = 0, \quad (3,7)$$

и тогда $\tilde{\eta}$ имеет вид

$$\tilde{\eta} = M(w - \bar{w}) + N(w + \bar{w}). \quad (3,8)$$

Производя вычисления, найдем:

$$\begin{aligned} \eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}} &= \frac{\varphi^2 \varphi_1^2}{\varphi_1^2 - \varphi^2} \left[\frac{(\ln \varphi)''}{\varphi^2} - \frac{(\ln \varphi_1)''}{\varphi_1^2} + 2 \frac{[(\ln \varphi)']^2 - [(\ln \varphi_1)']^2}{\varphi_1^2 - \varphi^2} \right] = \\ &= \frac{1}{\varphi^2 \varphi_1^2 (\varphi_1^2 - \varphi^2)^2} [\varphi \varphi_1^6 \varphi'' - \varphi_1^6 (\varphi')^2 + \varphi^4 \varphi_1^3 \varphi'' - 3\varphi^4 \varphi_1^2 (\varphi_1')^2 - \varphi^3 \varphi_1^4 \varphi'' + \\ &\quad + 3\varphi^2 \varphi_1^4 (\varphi')^2 - \varphi^6 \varphi_1 \varphi_1'' + \varphi^6 (\varphi_1')^2]. \end{aligned} \quad (3,9)$$

Лемма 3. Для того чтобы аналитическая зависимость (1,1) была номографируемой, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась любая из двух равносильных между собой систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (3,10) или (3,11):

$$\eta_{aab} = 2\eta_a \eta_{ab}, \quad \eta_{bba} = -2\eta_b \eta_{ab}, \quad (3,10)$$

$$\tilde{\eta}_{ppq} = 2\tilde{\eta}_p \tilde{\eta}_{pq}, \quad \tilde{\eta}_{qqp} = -2\tilde{\eta}_q \tilde{\eta}_{pq}. \quad (3,11)$$

Следствие. Если лемма 3 удовлетворяется, а условия (3,5) и (3,7) оба не удовлетворяются, то имеем зависимость четвертого жанра.

Лемма 4. Для того чтобы аналитическая зависимость (1,1) была номографируемой с заведомо непрямолинейной комплексной переменной z или w , необходимо и достаточно, чтобы при некотором постоянном c или \tilde{c} имели место следующие равенства, соответственно, (3,12) (или (3,15)) или (3,16) (или (3,17)):

$$e^{2\eta} \eta_{ab} = e^{2c}, \quad (3,12)$$

или, что то же, чтобы η было решением уравнения Лиувилля

$$\eta_{ab} = e^{-2(\eta-c)}, \quad (3,13)$$

или, что то же, чтобы η имело вид решения уравнения Лиувилля

$$e^{-2(\eta-c)} = -\frac{X'(a) Y'(b)}{[X(a) + Y(b)]^2}, \quad (3,14)$$

или, что то же, чтобы $e^{-2\eta}$ имело вид произведения некоторой

константы K на дробь (3,14), т. е.

$$e^{-2\eta} = K \frac{X'(a) Y'(b)}{[X(a) + Y(b)]^2}; \quad (3,15)$$

$$e^{2\tilde{\eta}} \tilde{\eta}_{pq} = e^{2\tilde{c}}, \quad (3,16)$$

или, что то же, чтобы $e^{-2\tilde{\eta}}$ имело вид:

$$e^{-2\tilde{\eta}} = \tilde{K} \frac{M'(p) N'(q)}{[M(p) + N(q)]^2}, \quad (3,17)$$

где \tilde{K} — некоторая константа.

Следствие. Если имеет место одно из равенств (3,12) — (3,15) и имеет место равенство (3,3) (или, что то же, (3,4)), то зависимость будет первого класса и второго жанра и с w — прямолинейной комплексной переменной. Если же (3,3) (или, что то же, (3,4)) не удовлетворяется, то зависимость (1,1) будет второго класса и четвертого жанра. Аналогично, если имеет место (3,16) (или (3,17)) и (3,1) удовлетворяется, то имеем зависимость первого класса с z — прямолинейной комплексной переменной. Если же (3,1) не удовлетворяется, то имеем зависимость второго класса и четвертого жанра.

Лемма 5. Для того чтобы (1,1) была номографируемой аналитической зависимостью, необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялась любая из двух равносильных между собой систем дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка (3,18) или (3,19):

$$[e^{2\eta} (\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}})]_z = 0, \quad [e^{2\eta} (\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}})]_{\bar{z}} = 0, \quad (3,18)$$

$$[e^{2\tilde{\eta}} (\tilde{\eta}_{ww} - \tilde{\eta}_{\bar{w}\bar{w}})]_w = 0, \quad [e^{2\tilde{\eta}} (\tilde{\eta}_{ww} - \tilde{\eta}_{\bar{w}\bar{w}})]_{\bar{w}} = 0. \quad (3,19)$$

Введем обозначение

$$K_4 = e^{2\eta} (\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}}) = - \frac{\varphi^4 \varphi_1^4}{(\varphi^2 - \varphi_1^2)^2} \left\{ \frac{(\ln \varphi)''}{\varphi^2} + \frac{(\ln \varphi_1)''}{\varphi_1^2} + 2 \frac{[(\ln \varphi)']^2 - [(\ln \varphi_1)']^2}{\varphi_1^2 - \varphi^2} \right\}. \quad (3,20)$$

Следствие. Если имеет место (3,18) или (3,19) и не имеют места (3,5) и (3,7), то зависимость (1,1) будет второго класса и четвертого жанра. Если же наряду с (3,18) (или, что то же, (3,19)) удовлетворяется и (3,5) и (3,7), то имеем зависимость нулевого жанра. Если же удовлетворяется только (3,5) (соответственно только (3,7)), то имеем зависимость первого класса второго жанра с z — прямолинейной (соответственно w — прямолинейной) комплексной переменной.

Следствие. Для того чтобы зависимость (1,1) была номографируемой с заведомо непрямолинейной комплексной переменной z или w , необходимо и достаточно, чтобы удовлетворялись, соответственно, уравнения (3,21) или (3,22):

$$2\eta_z + [\ln (\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}})]_z = 0, \quad 2\eta_{\bar{z}} + [\ln (\eta_{zz} - \eta_{\bar{z}\bar{z}})]_{\bar{z}} = 0, \quad (3,21)$$

$$2\tilde{\eta}_w + [\ln (\tilde{\eta}_{ww} - \tilde{\eta}_{\bar{w}\bar{w}})]_w = 0, \quad 2\tilde{\eta}_{\bar{w}} + [\ln (\tilde{\eta}_{ww} - \tilde{\eta}_{\bar{w}\bar{w}})]_{\bar{w}} = 0. \quad (3,22)$$

4. Теорема 1. Для того чтобы зависимость (1,1) была номографируемой, необходимо и достаточно, чтобы функция K_4 (3,20) была постоянной. При этом K_4 — действительная постоянная.

Теорема 2. В системах двух уравнений (1,4), (1,5), (3,18), (3,19), (3,21), (3,22) независимым является лишь одно.

Поступило
16 I 1952