Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МЕХАНИКА

Ю. Ф. МОРОШКИН

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОНФИГУРАЦИЙ МЕХАНИЗМОВ

(Представлено академиком И. И. Артоболевским 2 XI 1951)

В этой работе проблема конфигураций разрешена для любых систем, подчиненных голономным связям, в частности, и для систем с высшими парами. Таким образом, найденное решение обладает большой общностью.

Развитый автором метод исследования основан на последовательном применении уравнений преобразования. Эффективность этого метода следует из его соответствия природе изучаемого объекта. Действительно, характерное свойство кинематической цепи заключается именно в осуществлении ряда последовательных, от звена к звену, преобразований пространств, связанных со звеньями цепи. Исследованию движения замкнутых кинематических цепей предпослано исследование, относящееся к движению цепей незамкнутых. Это оправдывается соображениями, относящимися к природе геометрических связей этих двух классов кинематических цепей.

В качестве параметров, определяющих движение (простой) кинематической цепи $S = S_0 \ldots S_n$, приняты параметры относительных движений звеньев $S_0, \ldots, S_n$ рассматриваемой цепи. Уравнения кинематических пар связывают именно параметры названных относительных движений. Если ранг пары $S_{\nu-1}S_\nu$ равен r_ν, то из уравнений пары координаты $x^{K_\nu}_{\nu-1, i_{\nu-1}}$, $i_{\nu-1} = 1, 2, 3$, начала K_ν ортогональной декартовой системы $K_\nu x_{\nu 1} x_{\nu 2} x_{\nu 3}$, представляющей звено S_ν, в ортогональной декартовой системе $K_{\nu-1} x_{\nu-1,1} x_{\nu-1,2} x_{\nu-1,3}$, представляющей звено $S_{\nu-1}$, и эйлеровы углы $\psi^{(\nu-1, \nu)}$, $\theta^{(\nu-1, \nu)}$, $\varphi^{(\nu-1, \nu)}$, определяющие ориентацию осей системы $K_\nu x_{\nu 1} x_{\nu 2} x_{\nu 3}$ в системе $K_{\nu-1} x_{\nu-1,1} x_{\nu-1,2} x_{\nu-1,3}$, могут быть выражены в функции r_ν независимых параметров $q_1^{(\nu-1, \nu)}, \ldots, q_{r_\nu}^{(\nu-1, \nu)}$, роль которых могут играть, например, некоторые из названных 6 эйлеровых координат. Если так, то при помощи формул Эйлера 9 направляющих косинусов $(\nu - 1, \nu)_{i_{\nu-1} i_\nu}$, $i_{\nu-1}$, $i_\nu = 1, 2, 3$, осей системы $K_\nu x_{\nu 1} x_{\nu 2} x_{\nu 3}$ в системе $K_{\nu-1} x_{\nu-1,1} x_{\nu-1,2} x_{\nu-1,3}$ также будут выражены в функции параметров $q_1^{(\nu-1, \nu)}, \ldots, q_{r_\nu}^{(\nu-1, \nu)}$.

Для незамкнутой кинематической цепи уравнениями кинематических пар исчерпываются все связи системы. Положение звена S_n в системе звена S_0 определяется координатами $x^{K_n}_{0 i_0}$, $i_0 = 1, 2, 3$, начала K_n ортогональной декартовой системы $K_n x_{n1} x_{n2} x_{n3}$, представляющей звено S_n, в ортогональной декартовой системе $K_0 x_{01} x_{02} x_{03}$, представляющей звено S_0, и 9 направляющими косинусами $(0n)_{i_0 i_n}$, $i_0, i_n = 1, 2, 3$, осей системы S_n в системе S_0.

Уравнения преобразования направляющих косинусов имеют вид

$$(0n)_{i_0 i_n} = \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (01)_{i_0 i_1} (12)_{i_1 i_2} \dots (n-1, n)_{i_{n-1} i_n},$$

$$i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Далее, уравнения преобразования декартовых координат будут

$$x_{0i_0} = \overset{K_1}{x}_{0i_0} + \sum_{i_1} (01)_{i_0 i_1} \overset{K_2}{x}_{1i_1} + \dots$$

$$\dots + \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (01)_{i_0 i_1}(12)_{i_1 i_2} \dots (n-2, n-1)_{i_{n-2} i_{n-1}} \overset{K_n}{x}_{n-1, i_{n-1}} +$$

$$+ \sum_{i_1, \dots, i_n} (01)_{i_0 i_1}(12)_{i_1 i_2} \dots (n-1, n)_{i_{n-1} i_n} x_{ni_n},$$

$$i_0, \dots, i_n = 1, 2, 3. \tag{2}$$

В частности,

$$\overset{K_n}{x}_{0i_0} = \overset{K_1}{x}_{0i_0} + \sum_{i_1} (01)_{i_0 i_1} \overset{K_2}{x}_{1i_1} + \dots$$

$$\dots + \sum_{i_1, \dots, i_{n-1}} (01)_{i_0 i_1}(12)_{i_0 i_2} \dots (n-2, n-1)_{i_{n-2} i_{n-1}} \overset{K_n}{x}_{n-1, i_{n-1}}, \tag{3}$$

$$i_0 = 1, 2, 3,$$

так как $\overset{K_n}{x}_{ni_n} = 0$, $i_n = 1, 2, 3$. Уравнения (1) вместе с уравнениями (3) определяют $(0n)_{i_0 i_n}$, $i_0, i_n = 1, 2, 3$, и $\overset{K_n}{x}_{0i_0}$, $i_0 = 1, 2, 3$, в функции $(\nu - 1, \nu)_{i_{\nu-1} i_\nu}$ и $\overset{K_\nu}{x}_{\nu-1, i_{\nu-1}}$, $i_{\nu-1}, i_\nu = 1, 2, 3$; $\nu = 1, \dots, n$. Но в соответствии с тем, что было установлено выше, $(\nu - 1, \nu)_{i_{\nu-1} i_\nu}$, $i_{\nu-1}, i_\nu = 1, 2, 3$, и $\overset{K_\nu}{x}_{\nu-1, i_{\nu-1}}$, $i_{\nu-1} = 1, 2, 3$, входящие в уравнения (1), (3), могут быть заменены их выражениями в функции r_ν независимых параметров $q_1^{(\nu-1, \nu)}, \dots, q_{r_\nu}^{(\nu-1, \nu)}$. Предполагая указанную замену осуществленной для всех значений ν, $\nu = 1, \dots, n$, мы можем рассматривать уравнения (1), (3) как уравнения, определяющие положение звена S_n в системе звена S_0 в функции $N = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu$ независимых лагранжевых координат $q_1^{(01)}, \dots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$. При этом ранг системы (1), (3) относительно переменных $q_1^{(01)}, \dots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$ не может быть больше 6. Будучи равен числу степеней свободы звена S_n в движении этого звена относительно звена S_0, ранг системы (1), (3) представляет собою не что иное как ранг системы S (или системы S_n). Что касается уравнений (2), то эти уравнения должны быть истолкованы как уравнения движения в системе S_0 любой точки M звена S_n с координатами x_{ni_n}, $i_n = 1, 2, 3$, в системе S_n. При этом мы предполагаем, что параметры $q_1^{(01)}, \dots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$, входящие в уравнения (2), определены как некоторые функции времени. Уравнения движения точки M представляют вместе с тем параметрическую форму уравнений траектории этой точки.

Распределение вариаций точек звена S_ν в системе звена $S_{\nu-1}$ характеризуется векторами $\overline{v}^{(\nu-1, \nu)}$ и $\overline{\omega}^{(\nu-1, \nu)}$, где $\overline{v}^{(\nu-1, \nu)}$ есть скорость точки K_ν в системе $S_{\nu-1}$, а $\overline{\omega}^{(\nu-1, \nu)}$ — угловая скорость вращения звена S_ν в системе $S_{\nu-1}$. Главный вектор $\overline{\omega}^{(0n)}$ и главный момент $\overline{v}^{(0n)}$ системы векторов $\overline{\omega}^{(\nu-1, \nu)}$, $\overline{v}^{(\nu-1, \nu)}$, $\nu = 1, \dots, n$, определяют виртуальное движение звена S_n в системе (неподвижного) звена S_0. Нетрудно было бы убедиться в том, что уравнения, определяющие проекции вектора $\overline{\omega}^{(0n)}$ на оси неподвижной системы $K_0x_{01}x_{02}x_{03}$ представляют собою следствия уравнений преобразования направляющих косинусов и уравнений, являющихся результатом варьирования уравнений преобразования направляющих косинусов. Равным образом не представило бы затруднений выяснить и происхождение уравнений моментов, т. е. уравнений, определяющих проекции вектора $\overline{v}^{(0n)}$ на оси названной выше системы. Эти последние уравнения являются результатом варьирования уравнений преобразования координат в предположении, что $x_{ni_n} = \text{const}$, $i_n = 1, 2, 3$ (точка M фиксирована в системе S_n). Из изложенного видно, что в уравнениях преобразования заключены все без исключения характеристики движения системы $S = S_0 \ldots S_n$. Эти уравнения являются, следовательно, основными уравнениями геометрии незамкнутых кинематических цепей.

Если S_n совпадает с S_0, т. е. если система замкнута, то $(0n)_{i_0 i_n} = \text{const}$, $i_0, i_n = 1, 2, 3$, $x_{0i_0}^{K_n} = \text{const}$, $i_0 = 1, 2, 3$, и уравнения (1), (3) принимают форму уравнений геометрических связей системы $S_0 \ldots S_n$. Если, в частности, оси системы $K_n x_{n1} x_{n2} x_{n3}$ совпадают с соответствующими осями системы $K_0 x_{01} x_{02} x_{03}$, то $(0n)_{i_0 i_n} = E_{i_0 i_n}$, $E_{i_0 i_n} = 1$ при $i_0 = i_n$, $E_{i_0 i_n} = 0$ при $i_0 \neq i_n$, $i_0, i_n = 1, 2, 3$, и $x_{0i_0}^{K_n} = 0$, $i_0 = 1, 2, 3$, и уравнения (1), (3) принимают форму

$$\sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} (01)_{i_0 i_1} (12)_{i_1 i_2} \ldots (n-1, n)_{i_{n-1} i_n} = \begin{cases} 1, & i_0 = i_n, \\ 0, & i_0 \neq i_n, \end{cases} \tag{4}$$

$$x_{0i_0}^{K_1} + \sum_{i_1} (01)_{i_0 i_1} x_{1i_1}^{K_2} + \ldots$$
$$\ldots + \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} (01)_{i_0 i_1} \ldots (n-2, n-1)_{i_{n-2} i_{n-1}} x_{n-1, i_{n-1}}^{K_n} = 0, \tag{5}$$
$$i_0, \ldots, i_n = 1, 2, 3.$$

В соответствии с тем, что установлено выше, эти уравнения могут быть представлены как уравнения, включающие только координаты $q_1^{(01)}, \ldots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$ системы S. При этом число независимых уравнений системы (4), (5) не может быть больше 6. Это вытекает из того, что мы говорили выше о ранге системы уравнений преобразования относительно переменных $q_1^{(01)}, \ldots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$.

Таким образом, координатные параметры замкнутой кинематической цепи, помимо уравнений кинематических пар, подчинены уравнениям (4), (5), которые представляют собою не что иное, как условия совпадения звеньев S_n и S_0, другими словами,— условия замкнутости рассматриваемой кинематической цепи. Представив эти уравнения, в дальнейшем называемые уравнениями замкнутости кинематической цепи, в форме уравнений между $N = \sum_{\nu=1}^{n} r_\nu$ параметрами $q_1^{(01)}, \ldots, q_{r_n}^{(n-1, n)}$, о которых мы говорили, мы ограничим исследование движения замкнутой кинематической цепи исследованием уравнений замкнутости.

Из сказанного видно, что все, без всякого исключения, характеристики движения системы заключены в найденных нами уравнениях замкнутости. Таким образом, эти уравнения должны быть названы основными уравнениями геометрии замкнутых кинематических цепей. Так как, однако, геометрическое исследование является необходимой предпосылкой исследования динамического, то уравнения, о которых мы говорим, вместе с уравнениями Лагранжа составляют фундамент всей теории механизмов. Заметим, что уравнения (4), (5) эквивалентны уравнениям

$$\| (01)_{i_0 i_1} \| \dots \| (n-1, n)_{i_{n-1} i_n} \| = E_3, \tag{4'}$$

$$\left\| \begin{matrix} x_{01}^{K_1} \\ x_{02}^{K_1} \\ x_{03}^{K_1} \end{matrix} \right\| + \| (01)_{i_0 i_1} \| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{11}^{K_2} \\ x_{12}^{K_2} \\ x_{13}^{K_2} \end{matrix} \right\| + \dots$$

$$\dots + \| (01)_{i_0 i_1} \| \dots \| (n-2, n-1)_{i_{n-2} i_{n-1}} \| \cdot \left\| \begin{matrix} x_{n-1,1}^{K_n} \\ x_{n-1,2}^{K_n} \\ x_{n-1,3}^{K_n} \end{matrix} \right\| = 0 \tag{5'}$$

соответственно (E_3 — единичная матрица порядка 3).

Матричная форма уравнений замкнутости указывает простой алгоритм составления скалярных уравнений (4), (5): составление уравнений (4) приводится к последовательному перемножению матриц направляющих косинусов; в составлении уравнений (5) участвуют также матрицы-столбцы, каждая из которых составлена из координат точки K_ν в системе $K_{\nu-1}x_{\nu-1,1}\ x_{\nu-1,2}x_{\nu-1,3}$, $\nu = 1, \dots, n$.

Далее, необходимо подчеркнуть следующее. То обстоятельство, что число независимых уравнений системы (4), (5), будучи равно рангу r системы, меньше общего числа уравнений системы (4), (5), не только не усложняет решения задачи, но, напротив, в максимальной степени облегчает это решение. Действительно, из уравнений (4), (5) всегда можно выбрать наиболее простые.

Поступило
29 X 1951