Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

ФИЗИКА

Л. М. БРЕХОВСКИХ и И. Д. ИВАНОВ

О РАСШИРЕНИИ ГРАНИЦ ПРИМЕНИМОСТИ ЛУЧЕВОЙ ТЕОРИИ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СЛОИСТЫХ СРЕДАХ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 6 II 1952)

1. Рассмотрим задачу о полном отражении волны, излучаемой точечным излучателем A, от слоисто-неоднородного полупространства $z>0$ (рис. 1). Известно, что в случае достаточно малого показателя преломления в неоднородной среде поле в произвольной точке P можно представить как поле луча, построенного по законам лучевой теории.

В предлагаемой работе мы попытаемся показать, что лучевой метод расчета поля в точке P, лежащей в однородной среде, можно расширить, причем требование малости градиента не будет необходимым. Расширенный лучевой метод, в отличие от обычного, характеризуется тем, что в самой неоднородной среде построение луча не является необходимым. В однородной же среде луч строится по его «выходным данным» из неоднородной среды. При этом в неоднородной среде понятие о луче может совсем не иметь смысла, как это и получается в случае больших градиентов показателя преломления или малых углов скольжения.

2. Обозначим через $V(\alpha)$ коэффициент отражения плоских волн от границы $z=0$, где α — угол скольжения падающей волны. Представим $V(\alpha)$ в виде $V(\alpha)=e^{i\eta(\alpha)}$, где $\eta(\alpha)$ — фаза коэффициента отражения (которая в общем случае может быть комплексной); выражение для сферической отраженной волны, согласно [1], запишем в виде:

$$\psi=-\sqrt{\frac{k_0}{2\pi r}}\,e^{i\pi/4}\int\limits_{\pi-i\infty}^{i\infty} e^{ik_0R\cos(\alpha-\chi)+i\eta(\alpha)}\sqrt{\cos\alpha}\,d\alpha, \tag{1}$$

где r — горизонтальное расстояние между излучателем и приемником; R и χ — длина и угол скольжения гипотетического луча ABP, отражающегося от плоскости $z=0$. В акустическом случае ψ представляет собой звуковой потенциал, в электромагнитном — одну из компонент вектора Герца.

Предполагая, что $k_0R\gg 1$, будем анализировать интеграл (1) методом перевала. Обозначим: $f(\alpha)=k_0R\cos(\alpha-\chi)+\eta(\alpha)$. Точка перевала $\alpha=\alpha_0$ найдется из уравнения $f'(\alpha_0)=0$; при малых $\eta'(\chi)/k_0R$ имеем $\alpha_0\cong\chi+\eta'(\chi)/k_0R$. Деформируя первоначальный путь интегрирования так, чтобы он прошел через точку перевала по линии $\operatorname{Im} f=\text{const}$ (путь быстрейшего спада), и разлагая $f(\alpha)$ в ряд около $\alpha=\alpha_0$, предполагая при этом, что

$$|f'''(\alpha_0)|\ll\sqrt{k_0R}\,|f''(\alpha_0)|, \tag{2}$$

получаем обычным методом перевала:

$$\psi=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\cos\alpha_0}{\cos\chi}}\left[1-\frac{\eta''(\alpha_0)}{k_0R\cos(\alpha-\chi)}\right]^{-1/2}e^{ik_0R\cos(\alpha_0-\chi)+i\eta(\alpha_0)+i\pi/2}. \qquad (3)$$

Угол $\alpha=\alpha_0$ определяет направление, под которым приходит луч в точку, задаваемую величинами R и χ. Выражение (3) дает поле этого луча по амплитуде и по фазе. Как уже указывалось в [2], из $f'(\alpha_0)=0$ следует, что точка выхода луча из неоднородной среды отстоит от точки входа на расстоянии (так называемое смещение луча)

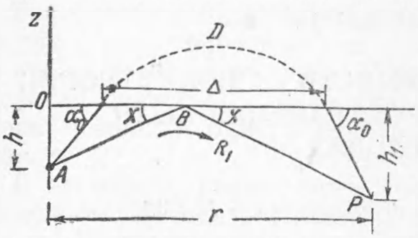

Рис. 1

$$\Delta=\frac{1}{k_0\sin\alpha_0}\left(\frac{d\eta}{d\alpha}\right)_{\alpha_0}. \qquad (4)$$

Фаза луча, задаваемая выражением в экспоненте в (3), соответствует оптической длине луча, идущего при $z<0$ со скоростью c_0 и под углом α_0 к горизонтали и, кроме того, смещающегося вдоль границы $z=0$ со скоростью $c_0/\cos\alpha_0$ [2].

3. Рассмотрим конкретный пример. Пусть зависимость показателя преломления n от координаты z дается законом:

$$n=1 \quad \text{при} \quad z\leqslant 0, \qquad n=(1-2az)^{1/2} \quad \text{при} \quad z>0. \qquad (5)$$

Поле плоской волны в однородной среде в общем случае задается выражением:

$$\psi_0=(e^{ik_0z\sin\alpha}+Ve^{-ik_0z\sin\alpha})\,e^{ik_0x\cos\alpha}, \qquad (6)$$

где первый член представляет собой падающую, а второй — отраженную волну. Множитель $e^{-i\omega t}$ опускаем.

Поле в слоисто-неоднородной среде представляет собой решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+(k_0n)^2\psi=0 \qquad (7)$$

при граничном условии

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial z}=\frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \psi_0=\psi, \quad z=0 \qquad (8)$$

и при условии

$$\psi\to 0, \quad z\to+\infty. \qquad (9)$$

Решение (7) ищем в виде [3]:

$$\psi=\varphi(z)\,e^{ik(z)\cos\alpha(z)x}, \quad k(z)=k_0n(z), \qquad (10)$$

причем для $\varphi(z)$ после несложных преобразований, введя обозначение $\sin^2\alpha-2az=\xi$, получаем уравнение: $\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+\left(\frac{k_0}{2a}\right)^2\xi\varphi=0$. Это уравнение имеет решение:

$$\varphi = A\sqrt{\xi}\,[H^{(2)}_{1/3}(w) + e^{i\pi/3}H^{(1)}_{1/3}(w)], \quad n(z) \geqslant \cos\alpha; \tag{11}$$

$$\varphi = A\sqrt{\xi}\,[H^{(2)}_{1/3}(we^{-2\pi i}), \qquad n(z) < \cos\alpha, \tag{12}$$

где H — функция Ганкеля, A — постоянная величина, $w = \frac{1}{3}\frac{k_0}{a}\xi^{3/2}$. Выражения (11) и (12) связаны между собой соотношением обхода ([4]), причем решение (12) удовлетворяет условию (9).

Из (6), (8), (10) и (11) находим коэффициент отражения $V(\alpha)$; выражая входящие в $V(\alpha)$ цилиндрические функции через функцию Эйри v и ее производную v' ([5]), получаем:

$$V(\alpha) = e^{i\eta(\alpha)}, \quad \eta(\alpha) = -2\,\mathrm{arctg}\left[\sqrt{t}\,\frac{v(-t)}{v'(-t)}\right] - \pi, \tag{13}$$

где $t = \left(\frac{3}{2}w\right)^{2/3} = \left(\frac{1}{2}\frac{k_0}{a}\right)^{2/3}\sin^2\alpha$.

При $k_0/a > 1$, что мы будем предполагать в дальнейшем, $\eta''(\alpha)$ по порядку величины равно $k_0 \sin\alpha / a$. При достаточно большом R этой

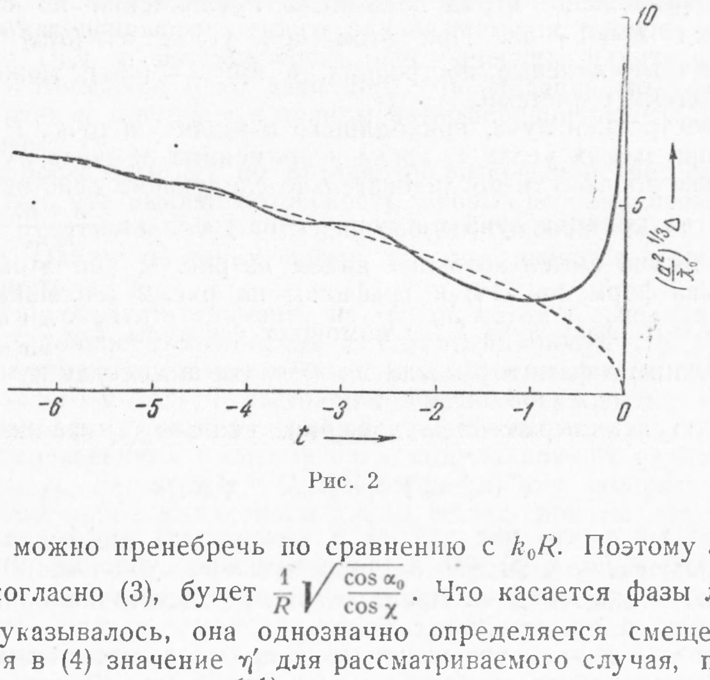

Рис. 2

величиной можно пренебречь по сравнению с k_0R. Поэтому амплитуда луча, согласно (3), будет $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{\cos\alpha_0}{\cos\chi}}$. Что касается фазы луча, то, как уже указывалось, она однозначно определяется смещением Δ. Подставляя в (4) значение η' для рассматриваемого случая, получаем (ограничиваясь случаем $\alpha \ll 1$):

$$\left(\frac{a^2}{\lambda_0}\right)^{1/3}\Delta = 2^{4/3}(-t)^{1/2}\left[1 + \frac{1}{2t}\,\frac{v(t)\,v'(t)}{v'^2(t) - tv^2(t)}\right], \tag{14}$$

где $t = -(\alpha^3/2a\lambda_0)^{2/3}$, $\lambda_0 = \lambda_0/2\pi$.

На рис. 2 функция $\Delta(t)$ изображена графически. Этим графиком удобно пользоваться в практических расчетах. Интересно сравнить Δ с $\Delta_{\text{геом}}$, полученным путем построения луча в неоднородной среде по обычным законам геометрической оптики; $\Delta_{\text{геом}}$ получается из (14) при $|t| \gg 1$ (достаточно малая длина волны и не очень малый угол скольжения). Используя асимптотические выражения для функций v и v' при большом t ([5]), получаем:

$$\left(\frac{a^2}{\lambda_0}\right)^{1/3} \Delta_{\text{геом}} = 2^{1/2} (-t)^{1/2}. \tag{15}$$

График этой функции показан пунктирной линией на рис. 2. Существенные расхождения между геометрической оптикой и точной теорией имеют место при $|t| \lesssim 1$, т. е. при $\alpha \lesssim (a\lambda_0)^{1/3}$.

4. Можно думать, что приведенные расчеты имеют довольно широкую применимость. В самом деле, при $\alpha \gtrsim (a\lambda_0)^{1/3}$ справедлива геометрическая оптика в неоднородной среде. При этом известно, что луч, падающий на неоднородную среду под углом скольжения α, имеет «точку заворота» при $z = z_m$, где z_m определяется из уравнения $n(z_m) = \cos\alpha$ или, согласно (5), $\sqrt{1 - 2az_m} = \cos\alpha$. Положим $\alpha = \alpha_0 \approx (a\lambda_0)^{1/3}$. Для этого значения α, предполагаемого малым ($a\lambda_0 \ll 1$), получаем $2az_m = \alpha_0^2 \ll 1$. Все лучи, для которых несправедливо геометрическое построение в неоднородной среде, соответствуют $\alpha < \alpha_0$, и можно думать, что волны, порождаемые этими лучами в неоднородной среде, сконцентрированы в основном в слое $0 < z < z_m$. Поэтому наши расчеты, приводящие к формуле (14) для малых углов скольжения ($\alpha < \alpha_0$), справедливы при любом законе изменения показателя преломления, лишь бы разложение в ряд показателя преломления по степеням z имело вид $n = 1 - az$. При этом при углах $\alpha \gtrsim (a\lambda_0)^{1/3}$ справедливы обычные лучевые построения, а при $\alpha \lesssim (a\lambda_0)^{1/3}$ можно пользоваться нашими расчетами.

При построении луча, приходящего в заданную точку P по нашей теории (при малых углах α, когда неприменима обычная лучевая теория), нужно произвести последовательно следующие действия: а) определить угол прихода луча α в точку P из уравнения $\frac{h + h_1}{\operatorname{tg}\alpha} + \Delta(\alpha) = r$, геометрический смысл которого виден из рис. 1; при этом функция $\Delta(\alpha)$ задана формулой (14) и графиком на рис. 2 (сплошная линия); б) определить фазу луча $k_0 l$ с помощью формулы $l = \frac{h + h_1}{\sin\alpha} + \Delta\cos\alpha$ (см. сказанное о фазе в разделе 2); в) найти амплитуду луча по формуле (3).

5. Пользуясь выражением для $f(\alpha)$, условие (2) запишем в виде:

$$\eta'''(\alpha_0) \ll \sqrt{k_0 R}\,[k_0 R - \eta''(\alpha_0)].$$

При малых α (что нас только и интересует) дифференцирование дает $\eta'''(\alpha) \sim k_0 / a$, $\eta''(\alpha) \sim 0$ и, следовательно, условие (2) сводится к условию $a\lambda_0 (k_0 R)^{3/2} \gg 1$. Предполагая $k_0 R$ достаточно большим, последнее можно считать выполненным.

6. Задача о полном отражении волн при распространении их в слоисто-неоднородной среде была рассмотрена Гансом [3]; им был рассчитан ход луча вблизи точки заворота в неоднородной среде. При этом он нашел, что луч в самой точке заворота образует излом. Нам кажется, что его результат не имеет физического смысла, так как прослеживать ход луча там, где неприменима лучевая теория, нельзя.

Поступило
12 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. М. Бреховских, УФН, 38, в. 1 (1949). [2] Л. М. Бреховских, ЖТФ, 21, в. 8 (1951). [3] R. Gans, Ann. d. Phys., 47, 709 (1915). [4] Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, § 2.62, 1949, стр. 90. [5] В. А. Фок, Таблицы функций Эйри. М., 1946.