

В. В. БОЛОТИН

О ПАРАМЕТРИЧЕСКИ ВОЗБУЖДАЕМЫХ КОЛЕБАНИЯХ  
УПРУГИХ АРОК

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 9 II 1952)

1. Будем называть нагрузку параметрической, если она входит как параметр в левые части уравнений возмущенного равновесия (движения). Нагрузка такого рода, будучи приложена статически, при достижении ею критического значения вызывает разветвление форм равновесия (потерю статической устойчивости первого рода).

Вибрационная параметрическая нагрузка, амплитуда которой меньше критического значения, при определенных соотношениях частот может вызвать потерю динамической устойчивости начальной формы равновесия (движения). Так, вибрационная продольная сила, вызывающая в прямолинейном стержне, вообще говоря, только продольные колебания, при определенных условиях может вызвать интенсивные поперечные колебания (1-3). Такие колебания, в отличие от обычных вынужденных, будем называть параметрически возбуждаемыми колебаниями.

2. Рассмотрим симметричную арку, нагруженную симметричной вибрационной нагрузкой (рис. 1а). Под действием этой нагрузки арка испытывает симметричные колебания, амплитуда которых может быть рассчитана обычными методами динамики сооружений. Однако при некоторых значениях возмущающей частоты симметричная форма колебаний может оказаться динамически неустойчивой: возникнут кососимметричные колебания, амплитуда которых быстро возрастет до весьма больших значений (рис. 1б).

Дифференциальное уравнение изгиба кругового стержня постоянного сечения имеет вид

$$\frac{EI}{R^4} \left( \frac{d^5 u}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3 u}{d\varphi^3} + \frac{du}{d\varphi} \right) = \frac{dq_r}{d\varphi} - q_\varphi, \quad (1)$$

где обозначено:  $R$  — радиус оси стержня,  $u, v$  — радиальное и тангенциальное перемещения,  $q_r, q_\varphi$  — радиальная и тангенциальная составляющие внешней нагрузки,  $\varphi$  — центральный угол.

Для получения уравнений возмущенного движения следует ввести в уравнение (1) силы инерции и дополнительные силы, возникающие при отклонении оси арки от начального положения.

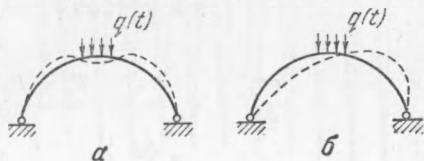


Рис. 1. а — вынужденные колебания; б — параметрически возбуждаемые колебания

Дальнейшие выводы основаны на допущении, что потеря динамической устойчивости происходит из недеформированного состояния. При исследовании соответствующей статической задачи подобное допущение нельзя считать обоснованным ввиду значительных симметричных деформаций, предшествующих потере устойчивости. Напротив, потеря динамической устойчивости может произойти при значениях

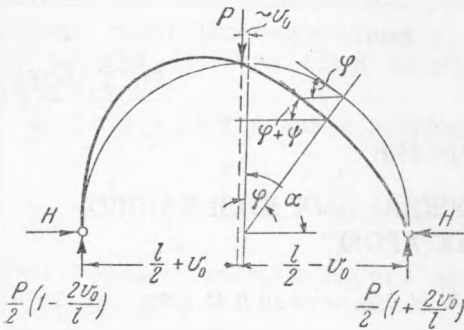


Рис. 2

нагрузки, весьма малых по сравнению с критическими, и соответственно при малых симметричных деформациях. Достаточно предположить только, что симметричные колебания происходят вдалеке от резонанса.

Пусть арка нагружена приложенной в замке сосредоточенной периодической силой

$$P(t) = P_0 + P_t \cos \theta t$$

(рис. 2). В этом случае правая часть уравнения (1) будет

$$\frac{\partial q_r}{\partial \varphi} - q_\varphi = - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{2R} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\sin \varphi + \lambda \cos \varphi) + 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi - \lambda \sin \varphi) \right] - m \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} \right)$$

при  $\varphi > 0$ ,

$$\frac{\partial q_r}{\partial \varphi} - q_\varphi = - \frac{P_0 + P_t \cos \theta t}{2R} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} (\lambda \cos \varphi - \sin \varphi) - 2 \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} (\cos \varphi + \lambda \sin \varphi) \right] - m \left( \frac{\partial^3 u}{\partial \varphi \partial t^2} - \frac{\partial^3 v}{\partial t^2} \right)$$

при  $\varphi < 0$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \left( \frac{\partial q_r}{\partial \varphi} - q_\varphi \right) d\varphi = - \frac{\psi(0) P_0}{R},$$

где  $\psi$  — приращение угла поворота сечений арки вследствие изгиба,

$$\lambda = \frac{2H}{P}.$$

Принято, что постоянная составляющая  $P_0$  не меняет при колебаниях своего направления (сила веса), а периодическая составляющая поворачивается вместе с замковым сечением, оставаясь все время перпендикулярной к оси арки. Такие условия встречаются обычно в практических приложениях.

Будем искать решение, пользуясь методом Б. Г. Галеркина. Положим:

$$u(\varphi, t) = T(t) \sin \frac{\pi \varphi}{\alpha},$$

$$v(\varphi, t) = - \frac{\alpha}{\pi} T(t) \left( 1 + \cos \frac{\pi \varphi}{\alpha} \right).$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению Матье

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 \left( 1 - \frac{P_0}{P_{кр}} - \frac{P_t}{P_{кр}(t)} \cos \theta t \right) T = 0, \quad (2)$$

где обозначено

$$\omega = \frac{\pi}{R^2 \alpha} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \sqrt{\frac{EI}{m (\pi^2/\alpha^2 + 3)}}, \quad (3)$$

$$P_{кр} = \frac{EI}{R^2} \frac{(\pi^2/\alpha^2 - 1) \alpha}{F(\alpha) - \frac{2(1 - 2\alpha^2/\pi^2)}{\pi^2/\alpha^2 - 1}}, \quad (4)$$

$$P_{кр}(t) = \frac{EI}{R^2} \left( \frac{\pi^2}{\alpha^2} - 1 \right) \frac{\alpha}{F(\alpha)},$$

$$F(\alpha) = \frac{(1 - \cos \alpha + \lambda \sin \alpha) (2\pi^2/\alpha^2 + 1)}{4\pi^2/\alpha^2 - 1} + \frac{1 - \cos \alpha - \lambda \sin \alpha}{\pi^2/\alpha^2 - 1}.$$

Формула (3) дает выражение для частоты собственных кососимметричных колебаний арки; формулы (4) — выражения для критических сил, вычисленных в предположении, что потеря статической устойчивости происходит при весьма малых симметричных деформациях. Случай поворачивающейся нагрузки дает более низкое значение критического параметра, что можно было предугадать из физических соображений.

Уравнение (2) аналогично уравнениям, к которым приводят задачи динамической устойчивости центрально сжатых стержней (1-4). Неограниченно возрастающие решения уравнения (2) соответствуют потере динамической устойчивости симметричных колебаний арки — неограниченно возрастающим кососимметричным колебаниям. Границы областей динамической неустойчивости могут быть рассчитаны известными методами.

3. Переходим к описанию экспериментальной части. Двухшарнирная круговая арка загружалась сосредоточенной периодической силой от вибратора, установленного в замке. Запись колебаний производилась на шлейфовом осциллографе при помощи проволочных датчиков.

Опыт дал хорошее подтверждение теоретических результатов. Вблизи возмущающей частоты, равной удвоенной частоте собственных кососимметричных колебаний арки, были получены весьма интенсивные кососимметричные колебания. Типичная осциллограмма параметрически возбуждаемых колебаний приведена на рис. 3. Видны также вынужденные колебания, происходящие с частотой внешней силы.

Во время одного из опытов арка была доведена до разрушения. Амплитуда внешней силы при этом не превышала 10% от статического критического значения.

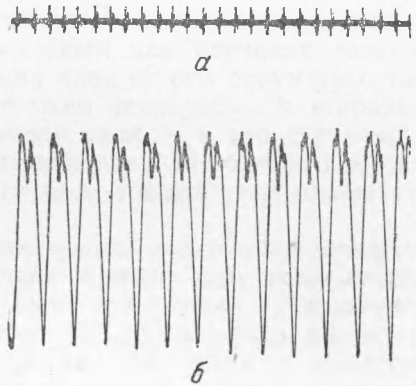


Рис. 3. *a* — параметрически возбуждаемые колебания (осциллограмма); *б* — отметчик частоты и фазы внешней силы; пики соответствуют максимуму внешней силы

Поступило  
16 I 1952

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. М. Беляев, Сборн. Инженерные сооружения и строительная механика, 1924. <sup>2</sup> Н. М. Крылов и Н. Н. Боголюбов, Сборн. Исследование колебаний конструкций, 1935. <sup>3</sup> В. В. Болотин, Сборн. Поперечные колебания и критические скорости, в. 1, 1951. <sup>4</sup> Г. Ю. Джанелидзе и М. А. Радциг, Прикл. матем. и мех., нов. сер., 4, в. 5—6 (1940).