Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

А. В. СУЛЬДИН

О ЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ АЛГЕБР ЛИ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ $p > 0$

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 10 XII 1951)

Для алгебр Ли над полем характеристики нуль справедлива теорема Адо, утверждающая, что каждая алгебра Ли имеет точное представление матрицами. Как оказалось, для полей характеристики $p > 0$ справедливо более сильное утверждение, именно, что каждая алгебра Ли имеет вполне приводимое линейное представление. Доказательство основывается на предложенной В. В. Морозовым в ([1]) модификации метода Биркгофа. С другой стороны, оказалось, что если степень неприводимой матричной алгебры Ли не делится на характеристику поля, то она разлагается в прямую сумму полупростой и абелевой. Это — распространение известной теоремы Картана на поля простой характеристики.

Пусть L — алгебра Ли, $e_1, \ldots, e_n$ — ее базис, и пусть

$$[e_i, e_j] = c_{ij}^s e_s. \tag{1}$$

Свободное ассоциативное кольцо U, порожденное образующими $e_1, \ldots, e_n$, связанными соотношениями (1), где $[e_i, e_j] = e_i e_j - e_j e_i$, называется универсальной одевающей алгеброй для L. Если рассматривать U над полем k характеристики $p > 0$, то для его элементов при любом целом положительном f имеет место известное тождество

$$[x^{p^f}, y] = \underbrace{[x, [x, \ldots, [x, y] \ldots]}_{p^f \text{ раз}} = \mathbf{x}^{p^f} y, \tag{2}$$

где $\mathbf{x}$ — матрица, соответствующая x в регулярном представлении. Это тождество вытекает из соотношения

$$\underbrace{[x, [x, \ldots, [x, y] \ldots]}_{n \text{ раз}} = x^n y - C_n^1 x^{n-1} y x + \ldots + (-1)^n y x^n.$$

Далее, для каждого $x \in L$ существует полином φ_x такой, что $\varphi_x(x^p)$ лежит в центре U. В самом деле, матрицы $\mathbf{x}^{p^f}, \mathbf{x}^{2p^f}, \ldots, \mathbf{x}^{kp^f}$ при достаточно большом k все не могут быть линейно независимы. Следовательно, существует соотношение вида

$$\varphi_x(\mathbf{x}^{p^f}) = 0,$$

где φ_x — полином. В силу (2), $\varphi_x(x^{p^f})$ лежит в центре U.

Теорема 1. *Каждая алгебра Ли над полем характеристики $p>0$ имеет точное вполне приводимое представление матрицами.*

Доказательство. Пусть N — максимальный нильпотентный идеал L; $\eta_1, \ldots, \eta_s$ — его базис. Пусть $e_1, \ldots, e_m$ есть дополнение $\eta_1, \ldots, \eta_s$ до базиса L. Образуем для L универсальную одевающую алгебру U, присоединим в ней единицу и выберем новую систему образующих, положив

$$\bar{e}_i = e_i, \quad \bar{\eta}_i = \eta_i - \alpha_i,$$

где α_i — некоторые числа из k. Базис U будет иметь вид

$$1, \ \bar{e}_1^{\lambda_1} \ldots \bar{e}_m^{\lambda_m} \cdot \bar{\eta}_1^{\mu_1} \ldots \bar{\eta}_s^{\mu_s} \quad (\lambda_i, \mu_i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Закрепим какое-нибудь число $p^f > c$, если $N^c = 0$. Пусть $\varphi_i^e = \varphi_i(e_i^{pf})$, $\varphi_k^\eta = \varphi_k(\eta_k^{p^f})$ — полиномы, лежащие в центре U. Полиномы φ_k^η мы выберем специальным образом, полагая $\varphi_k^\eta = \eta_p^{pf}$. Рассмотрим в U идеал I, порожденный полиномами φ. Так как φ лежат в центре U, то каждый элемент из I имеет вид

$$u_I = \sum \varphi_i f_i,$$

где f_i считаются выраженными через базис (3). Переставляя φ_i на подобающее им место в каждом из элементов f_i, мы выразим u_I через элементы базиса (3), степень каждого из которых будет больше или равна p^f. Так как базисные элементы линейно независимы, то в I не может содержаться никакой полином степени меньшей p^f. В частности, I не пересекается с L. Фактор-алгебра U/I конечна, имеет единицу и содержит L. Точное матричное представление U/I даст нам точное представление L, в котором элементам η_i соответствуют матрицы удовлетворяющие соотношениям

$$(\eta_i - \alpha_i)^{pf} = 0. \tag{4}$$

Из этого представления можно выделить неприводимое представление L, причем матрицы, соответствующие элементам η_i, будут также удовлетворять соотношениям (4). Пусть A — абелев идеал алгебры L. Очевидно, $A \subset N$. Пусть базис N выбран так, что $\eta_{s_1+1}, \ldots, \eta_s$ образуют базис A. Пусть $\alpha_{s_1+k} \neq 0$, $\alpha_i = 0$ $(i \neq s_1 + k)$ и $\bar{L}_{s_1+k}$ — соответствующее неприводимое представление L; $\bar{L}$ — точное вполне приведенное представление L/R, где R — радикал L. Его можно получить, например, из регулярного представления L/R. Если A — максимален, то всякий идеал R пересекается с A, следовательно, представление

$$\bar{L} \dot{+} \sum_{k=1}^{s-s_1} {}^{\dot{}} \bar{L}_{s_1+k}$$

даст нам точное вполне приведенное представление L.

Из доказательства этой теоремы вытекает ряд интересных следствий.

Следствие 1. Нильпотентная алгебра Ли с одночленным центром имеет точное неприводимое представление, в котором элементам треугольного базиса соответствуют матрицы, имеющие каждая по одному наперед заданному собственному значению.

Этот факт был ранее доказан Цассенхаузом ([2], стр. 99).

Следствие 2. Неразложимая в прямую сумму разрешимая алгебра Ли, производная которой имеет одночленный центр, имеет точное неприводимое представление. Если базис производной треугольный, то соответствующие матрицы имеют каждая по одному собственному значению.

Следствие 3. Пусть поле k алгебраически замкнуто, а радикал R алгебры L либо нильпотентен с одночленным центром, либо удовлетворяет условиям следствия 2. Если L неразложима, а L/R проста, то L обладает точным неприводимым представлением.

Доказательство проводится так же, как и для теоремы 1, лишь с условием, что вместо, например, φ_1^e берется полином $\overline{\varphi}_1^e = \varphi_1((e_1-\beta)^{p^f})$, если $\varphi_1(\beta^{p^f}) = 0$. Так как поле алгебраически замкнуто, то такое β всегда найдется.

Теорема 2. *Если степень неприводимой матричной алгебры Ли над полем характеристики p не делится на p, то*

$$L = A \dotplus Z,$$

где A — полупростая, а Z — абелева.

Доказательству мы предпошлем две леммы.

Лемма 1. *Если A — неприводимая система матриц и $I = \{I_1, \ldots, I_s\}$ — система коммутирующих друг с другом матриц, причем $[AI] \subset I$, то матрица $\lambda_1 I_1 + \ldots + \lambda_s I_s$, где λ_i — независимые переменные, неособенная.*

Это есть видоизменение леммы Шура.

Лемма 2. *Пусть A, I, $I' = [AI]$ — матрицы, $II' = I'I$; тогда $\mathrm{Sp}(I')^k = 0$ при любом k; если, кроме того, I' — неособенная, то $I' = 0$ в случае, если степень матриц не делится на p.*

Это есть видоизменение одной из лемм Джекобсона [3].

Доказательство теоремы. Пусть I — максимальный абелев идеал L. Тогда $I' = [L, I] = 0$ в силу лемм 1 и 2, т. е. I совпадает с центром L. Так как матрицы центра Z неособенные, то $Z \cap L' = 0$ и, следовательно,

$$L = A \dotplus Z.$$

A — полупростая, ибо не может содержать абелевого идеала в силу максимальности Z.

Казанский государственный университет
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
2 VI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Морозов, Сборн. работ НИИММ им. Чеботарева, Уч. зап. КГУ, **110**, кн. 7, 15 (1950). [2] H. Zassenhaus, Abh. aus d. Math. Seminar d. Hansischen Univ., **13**, H. 1—2 (1939). [3] N. Jacobson, Ann. of Math., **36**, 875 (1935).