Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

О КЛАССЕ РИМАНОВОЙ МЕТРИКИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 25 I 1952)

Как известно, классом m-мерной вещественной римановой метрики $ds^2 = g_{ij}du^i du^j$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ называется число q такое, что метрика ds^2 реализуется в виде m-мерной поверхности V_m в $(m+q)$-мерном вещественном евклидовом пространстве E_{m+q}, но не реализуется в пространстве меньшей размерности. Условие того, что данная метрика имеет класс 0, т. е. является евклидовой, имеет вид $R_{ij,kl} = 0$, $i, j, k, l = 1, \ldots, m$, где $R_{ij,kl}$ — тензор Римана — Кристофеля.

Полная классификация метрик класса 1 стала возможной в результате работ [1–5].

В настоящей заметке формулируются необходимые и достаточные критерии класса $\leqslant q$ для метрик типа $t \geqslant 3$ (определение типа метрики дается ниже; см. также [6]). Сформулируем основную теорему существования, с помощью которой получаются критерии класса метрик.

Теорема 1. *Если система линейных дифференциальных форм от дифференциалов* $du^1, \ldots, du^m$:

$$\omega^i;\ \omega^{m+s} = 0,\ \ [\omega^1 \ldots \omega^m] \neq 0,\quad i = 1, \ldots, m,\quad s = 1, \ldots, q;$$
$$\omega^\alpha_\beta,\quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q, \tag{1}$$

и симметричная положительно определенная матрица $g_{\alpha\beta}(u^1, \ldots, u^m)$, $\mathrm{Det}(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, *удовлетворяют соотношениям*:

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\quad (\omega^\alpha)' = [\omega^i \omega^\alpha_i],\quad \alpha = 1, \ldots, m+q,\quad i = 1, \ldots, m;\\
&\text{b)}\quad (\omega^i_j)' = [\omega^k_j \omega^i_k] + [\omega^{m+s}_j \omega^i_{m+s}],\quad i, j = 1, \ldots, m,\ s = 1, \ldots, q;\\
&\text{c)}\quad (\omega^{m+s}_i)' = [\omega^j_i \omega^{m+s}_j] + [\omega^{m+t}_i \omega^{m+s}_{m+t}];\\
&\text{d)}\quad (\omega^i_{m+s})' = [\omega^j_{m+s} \omega^i_j] + [\omega^{m+t}_{m+s} \omega^i_{m+t}];\\
&\text{e)}\quad (\omega^{m+s}_{m+t})' = [\omega^{m+i}_{m+t} \omega^{m+s}_i] + [\omega^{m+\tau}_{m+t} \omega^{m+s}_{m+\tau}];
\end{aligned} \tag{2}$$

$$dg_{\alpha\beta} = \omega^\gamma_\alpha g_{\gamma\beta} + \omega^\gamma_\beta g_{\gamma\alpha}, \tag{2'}$$

то система дифференциальных уравнений

$$dr = \omega^i I_i,\quad dI_\alpha = \omega^\beta_\alpha I_\beta \tag{3}$$

и конечных соотношений

$$g_{\alpha\beta} = I_\alpha I_\beta \tag{4}$$

вполне интегрируема и определяет с точностью до движения поверхность $V_m \subset E_{m+q}$, *для которой уравнения* (3) *являются деривационными формулами.*

В дальнейшем мы ограничимся реперами $\{I_\alpha\}$, для которых

$$I_{m+s} I_\alpha = g_{m+s\,\alpha} = \delta_{m+s\,\alpha}, \quad s = 1, \ldots, q, \quad \alpha = 1, \ldots, m+q. \tag{5}$$

В таких реперах имеют место соотношения

$$\omega^i_{m+s} = -g^{ij}\omega^{m+s}_j, \quad \omega^{m+s}_{m+t} = -\omega^{m+t}_{m+s}, \quad dg_{ij} = \omega^k_i g_{kj} + \omega^k_j g_{ki}. \tag{6}$$

На основании теоремы 1 задача определения класса метрики $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$, $i, j = 1, \ldots, m$, где ω^i — линейные формы от $du^1, \ldots, du^m$, ставится следующим образом:

Возможно ли к системе форм

$$\omega^i, \ \omega^{m+s} = 0, \ \ i = 1, \ldots, m, \ \ s = 1, \ldots q; \quad \omega^i_j = \Gamma^i_{jk}\omega^k, \ \ i, j = 1, \ldots, m \tag{7}$$

(Γ^i_{jk} — неголономные коэффициенты связности метрики) присоединить систему форм

$$\psi^s_i = \omega^{m+s}_i, \quad s = 1, \ldots, q, \quad i = 1, \ldots, m; \quad \psi^i_s = \omega^i_{m+s} = -g^{ij}\omega^{m+s}_j;$$
$$\theta^s_t = \omega^{m+s}_{m+t} = -\omega^{m+t}_{m+s} \tag{8}$$

так, чтобы удовлетворялись условия (2). Если это возможно, то в силу теоремы 1 класс метрики $\leqslant q$.

Отметим, что условия $(\omega^{m+s})' = [\omega^i\omega^{m+s}_i] = 0$ означают $\omega^{m+s}_i = \lambda^s_{ij}\omega^j$, $\lambda^s_{ij} = \lambda^s_{ji}$, $s = 1, \ldots, q$, $i, j = 1, \ldots, m$.

Опуская в условиях 2 b) индекс i с помощью тензора g_{ij}, мы можем привести их к виду

$$\Omega_{ij} = (\omega_{ij})' - [\omega^k_i \omega_{kj}] = R_{ij,\,kl}\,[du^k du^l] = \sum_{s=1}^{q} [\psi^s_i \psi^s_j]. \tag{9}$$

Для дальнейшего введем несколько понятий чисто алгебраического характера.

Определение 1. Системой скалярных произведений называется система чисел $\Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\beta\alpha}$, получающаяся из некоторой квадратной симметрической матрицы $\overline{\Sigma}_{\alpha\beta} = \overline{\Sigma}_{\beta\alpha}$ (α, $\beta = 1, \ldots, m$) выбрасыванием некоторых ее элементов.

Определение 2. Система скалярных произведений $\Sigma_{\alpha\beta} = \Sigma_{\beta\alpha}$ (α, β пробегают некоторые части сегмента $[1 \ldots n]$) имеет класс q, если система уравнений

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \sum_{s=1}^{p} \mu^s_\alpha \mu^s_\beta = (\mu_\alpha \mu_\beta) \tag{10}$$

разрешима при $p = q$, но не разрешима при $p < q$.

Система $(\Sigma_{\alpha\beta})$ класса q называется жесткой, если уравнения (10) при $p = q$ допускают единственное решение, и нежесткой в противном случае.

В двух частных случаях алгоритм определения класса довольно прост:

А. В случае, когда система $(\Sigma_{\alpha\beta})$ есть квадратная симметричная матрица $\|\Sigma_{\alpha\beta}\|$, α, $\beta = 1, \ldots, m$. В этом случае класс $(\Sigma_{\alpha\beta})$ равен рангу матрицы $\|\Sigma_{\alpha\beta}\|$.

Б. В случае, когда система имеет вид, представленный на рис. 1, т. е. состоит из $\frac{m(m-1)}{2}$ невырожденных квадратных матриц m_{ij}, в каждой из которых имеется q^2 элементов L_{ijst}. При этом диагональные квадраты не заполнены. Элементы этой матрицы образуют систему скалярных произведений (L_{ijst}).

Условие класса q состоит в следующем. Приравниваются нулю определители $(q+1)$-го порядка и отсюда явно определяются элементы L_{iist} центральных матриц как рациональные функции величин L_{ijst}. Ранг полученной матрицы должен равняться q. В этом случае величины L_{ijst} реализуются как скалярные произведения векторов a_{is}: $\sum\limits_{\tau=1}^{q} a_{is}^{\tau} a_{it}^{\tau} = L_{ijst}$. Условие вещественности реализации состоит в положительной определенности полной матрицы L_{ijst}.

Определение 3. Присоединенной системой линейных форм данной системы косых q-форм

$$\Omega_\alpha\left(\xi_1^i, \dots, \xi_q^i\right) = a_{\alpha i_1 \dots i_q} \xi_1^{i_1} \dots \xi_q^{i_q}, \quad i_1, \dots, i_q = 1, \dots, m, \quad \alpha = 1, \dots, m, \tag{11}$$

где $a_{\alpha i_1 \dots i_q}$ — антисимметрический тензор, называется совокупность линейных форм $\psi_{\alpha i_1 \dots i_q} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{\alpha i_1 \dots i_{q-1}} \xi^i$.

Базисом и рангом системы форм (11) называется, соответственнно, базис и ранг присоединенной системы форм.

Определение 4. Рангом метрики $ds^2 = g_{ij}\omega^i\omega^j$ называется ранг системы билинейных косых форм $\Omega_{ij} = R_{ij,kl}[du^k du^l]$. Из условий (9) легко следует, что для метрик класса $\leqslant q$ формы

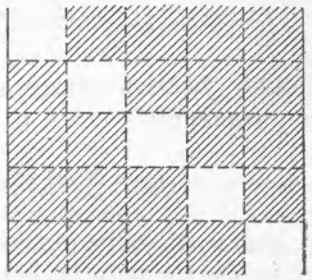

Рис. 1

$$\Phi_{\alpha\beta} = \left[\Omega_{\alpha\beta}^{q}\right], \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, m, \tag{12}$$

являются простыми в любом репере.

Определение 5. Обозначим $U_{\alpha\beta}$ — базис $\Phi_{\alpha\beta}$, $r_{\alpha\beta}$ — ранг $U_{\alpha\beta}$; $U_{\alpha\alpha\beta\gamma}$ — базис $\Phi_{\alpha\beta}$, $\Phi_{\alpha\gamma}$, $r_{\alpha\alpha\beta\gamma}$ — ранг $U_{\alpha\alpha\beta\gamma}$; $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — базис $\Phi_{\alpha\beta,\gamma\delta}$, $r_{\alpha\beta\gamma\delta}$ — ранг $U_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и т. д. Тогда, по определению, $t = 0, 1$, если в любом репере $\Phi_{\alpha\beta} = 0$ или $r_{\alpha\beta} < 2q$; $t = 2$, если $\Phi_{\alpha\beta} \neq 0$, $r_{\alpha\alpha\beta\gamma} < 3q$; $t = 3$, если $r_{\alpha\alpha\beta\gamma} \geqslant 3q$, $r_{\alpha\beta\gamma\delta} < 4q$, т. е. $[\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\gamma\delta}] = 0$, и т. д.

После этого можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 2. *Если тип метрики* $\geqslant 2$, *то ранг и тип метрики совпадают, соответственно, с рангом и типом реализации.*

Теорема 3. *Если тип метрики* $\geqslant 3$, *то условия* 2d) *являются следствиями условий* 2b), c).

Теорема 4. *Если тип метрики* $t \geqslant 4$, *то условия* 2c), d), e) *алгебраически следуют из условий* 2b).

Теорема 5. *Если тип метрики* $t \geqslant 3$, *то условия* 2b), c) *эквивалентны условиям*

$$\left[\Delta_{(i}^{s}\psi_{i_1}^{1} \dots \psi_{i_q)}^{q}\right] = 0, \quad i, i_1, \dots, i_q = 1, \dots, m, \tag{13}$$

где

$$\Delta_i^s = \left(\psi_i^s\right)' - \left[\omega_i^k \psi_k^s\right], \quad i, k = 1, \dots, m, \quad s = 1, \dots, q. \tag{14}$$

Теорема 6. *Для того чтобы условия* (9) *выполнялись, необходимо и достаточно выполнение следующих условий*:

А. *Система уравнений*

$$\left[\Phi_{ij}\varphi_i\right] = 0, \quad i \ \text{ произвольно фиксировано}, \quad j = 1, \dots, m, \tag{15}$$

где φ_i — *линейные формы, должна иметь* q *и только* q *линейно независимых решений* $\varphi_i^1, \dots, \varphi_i^q$ *для любого* $i = 1, \dots, m$, *причем* $[\varphi_i^1 \dots \varphi_i^q \varphi_j^1 \dots \varphi_j^q] \neq 0$.

Б.

$$\frac{\left[\Omega_{ij}\varphi_i^1\ldots\varphi_i^{s-1}\varphi_i^{s+1}\varphi_i^q\varphi_j^1\ldots\varphi_j^{t-1}\varphi_j^{t+1}\ldots\varphi_j^q\right]}{\left[\varphi_i^1\ldots\varphi_i^q\varphi_j^1\ldots\varphi_j^q\right]}=L_{ijst}, \tag{16}$$

где L_{ijst} — числа.

В. *Класс системы скалярных произведений L_{ijst} равен q.*

Легко видеть, что условия А сводятся к оценке ранга некоторой системы линейных однородных уравнений, φ_i^s находятся как решения системы линейных однородных уравнений. Следует заметить также, что система L_{ijst} при $t \geqslant 3$ жесткая, формы ψ_i^s определяются из (9) однозначно.

Теорема 6 дает условие разрешимости системы уравнений

$$\Omega_{ij}=\sum_{s=1}^{q}\left[\psi_i^s\psi_j^s\right], \quad i, j=1, \ldots, m.$$

Можно указать также алгоритм для определения ψ_i^s. Действительно, из уравнений

$$L_{ijst}=\sum_{\tau=1}^{q}a_{is}^{\tau}a_{jt}^{\tau}, \quad i, j=1, \ldots, m, \qquad s, t=1, \ldots, q, \tag{17}$$

величины a_{is}^{τ} определяются с помощью рациональных операций и операции извлечения корня. Тогда ψ_i^s определяются с помощью соотношений

$$\psi_i^s=\sum_{\tau=1}^{q}a_{is}^{\tau}\varphi_i^{\tau}.$$

Теорема 7. *Если тип метрики $t \geqslant 3$, то из соотношений* (9) *следует*

$$\psi_i^s=\lambda_{ij}^s\omega^j, \quad \lambda_{ij}^s=\lambda_{ji}^s. \tag{18}$$

На основании этих теорем можно сформулировать следующие условия класса.

Теорема 8. *Для того чтобы метрика $ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$ типа $t \geqslant 4$ имела класс, равный q, необходимо и достаточно выполнения условий* А—В *теоремы* 6.

Теорема 9. *Для того чтобы метрика $ds^2=g_{ij}\omega^i\omega^j$ типа $t \geqslant 3$ имела класс, равный q, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись, кроме условий* А — В *теоремы* 6, *условия*

$$\left[\Delta_{(i}^s\psi_{i_1}^1\ldots\psi_{i_q)}^q\right]=0, \quad i, i_1, \ldots, i_q=1, \ldots, m, \tag{19}$$

где $\Delta_i^s=\left(\psi_i^s\right)'-\left[\omega_i^j\psi_j^s\right]$.

Заметим, что мы рассматриваем метрику в репере общего положения, т. е. предполагаем, что все соотношения типа $f \neq 0$, которые могут быть получены в результате преобразования репера, выполняются.

Поступило
10 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] U. Sbrana, Rend. del Circ. Mat. di Palermo, **27** (1909). [2] E. Cartan, Bull. de la Soc. math. de France, **44** (1916). [3] K. M. Weise, Math. Ann., **110**, 522 (1934). [4] W. I. Thomas, Acta Math., **67**, 169 (1936). [5] Н. А. Розенсон, Изв. АН СССР, сер. матем., **7**, № 6, 253 (1943). [6] Н. Н. Яненко, ДАН, **64**, № 5 (1949).