Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. С. САЛЕХОВ

О СХОДИМОСТИ ПРОЦЕССА КАСАТЕЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 10 XI 1951)

Л. В. Канторович ([1-3]) исследовал сходимость аналога процесса Ньютона для общих нелинейных функциональных уравнений $P(x)=0$, где операция P является дважды дифференцируемой в смысле Фреше ([4]) и переводит элементы некоторого нормированного пространства $X \supset x$ в элементы другого нормированного пространства $Y \supset y$.

Из результатов Канторовича, в частности, вытекают, например, известные результаты Коши ([5]), Островского ([6]) и другие, полученные для случая вещественного или комплексного уравнения

$$P(x)=0. \tag{1}$$

В этой работе мы исследуем вопрос о сходимости одного итеративного процесса также для уравнения (1) при условии, когда $P(x)$ в рассматриваемой области допускает производную 3-го порядка. При этом, как показывает теорема 1, быстрота сходимости этого процесса оказывается значительно сильнее, чем у процесса Ньютона.

Если выбрано некоторое начальное приближение x_0, то этот процесс будет определен следующей итерацией:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2P'(x_n)\,P(x_n)}{2\,[P'(x_n)]^2-P''(x_n)\,P(x_n)}. \tag{2}$$

По геометрическому смыслу итерацию (2), аналогично процессу (Ньютона) касательных, естественно называть процессом касательных гипербол, так как он исходит из того факта, что кривая $y=P(x)$ и гипербола $y=\frac{x+\alpha}{\beta x+\gamma}$ с соответствующим образом подобранными параметрами в точке (x_0, y_0) имеют касание 2-го порядка.

Заметим, что подобные итеративные процессы указываются, например, в работах ([7-9]), однако вопрос о сходимости процесса (2) не исследован.

В настоящей работе, пользуясь некоторой модификацией идей доказательства Л. В. Канторовича ([1]), мы устанавливаем справедливость двух теорем. Первая из этих теорем доказывает условия существования решения уравнения (1) и быстроту сходимости процесса (2) к решению и дает область расположения последнего. Вторая теорема устанавливает область существования единственного решения.

Теорема 1. *Пусть для начального приближения x_0 выполнены следующие условия:*

1) $\frac{1}{|P'(x_0)|} \leqslant B_0$;

2) $\left| \dfrac{2P'(x_0)\,P(x_0)}{2\,[P'(x_0)]^2 - P''(x_0)\,P(x_0)} \right| \leqslant \eta_0$;

3) *в области g, определяемой неравенством*

$$|x - x_0| < 2\eta_0,$$

имеют место условия

$$\sup_{g \supset x} |P''(x)| \leqslant M, \quad \sup_{g \supset x} |P'''(x)| \leqslant N;$$

4) $h_0 = B_0 \eta_0 M \leqslant 1/2$;

5) $R_0 = \left[\dfrac{N}{M^2 B_0}(2 + h_0) + 3 \right](1 + h_0) \leqslant 9$.

Тогда уравнение (1) *в области* g *имеет решение* x^*, *к которому сходится процесс касательных гипербол, причем быстрота сходимости определяется неравенством*

$$|x^* - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{3^n - 1}\eta_0.$$

Доказательство. Покажем, что при переходе от x_0 к x_1 условия 1) — 5) не нарушаются.

На основании (2) и условий 2) и 4) имеем

$$\frac{1}{|P'(x_1)|} \leqslant \frac{B_0}{1 - h_0} = B_1, \tag{3}$$

т. е. условие 1) выполнено для точки x_1.

Далее нетрудно доказывается неравенство

$$\left| \frac{P(x_1)}{P'(x_1)} \right| \leqslant \frac{[N(2 + h_0) + 3M^2 B_0]\, B_0 \eta_0^3}{12\left(1 - \dfrac{h_0}{2}\right)(1 - h_0)} = \delta_1. \tag{4}$$

Пользуясь этим неравенством и условием 3), получим

$$\left| \frac{2P'(x_1)\,P(x_1)}{2\,[P'(x_1)]^2 - P''(x_1)\,P(x_1)} \right| \leqslant \frac{\delta_1}{1 - \dfrac{MB_1\delta_1}{2}} = \eta_1. \tag{5}$$

Пользуясь (4) и условием 4), будем иметь

$$\eta_1 \leqslant 2h_0^2 \eta_0 \leqslant \frac{\eta_0}{2}, \tag{6}$$

т. е. выполнено условие 2) для точки x_1.

Условие 3) также выполнено для точки x_1, так как соответствующая ей область g не будет выходить за пределы области

$$|x - x_0| < 2\eta_0.$$

Зная, что $B_1 \leqslant 2B_0$, и используя неравенство (6), получим

$$h_1 \leqslant 4h_0^3 \leqslant h_0 \leqslant 1/2. \tag{7}$$

В силу того, что $B_1 > B_0$ и $h_1 \leqslant h_0$, очевидно,

$$R_1 < R_0 < 9.$$

Итак, для $x = x_0$ выполнены все условия 1) — 5) с заменой чисел B_0, η_0, h_0, R_0 на B_1, η_1, h_1, R_1. Это позволяет продолжить последовательное определение элементов x_n и оценить связанные с ними числа B_n, η_n, h_n, R_n на основании следующих соотношений:

$$B_n = \frac{B_{n-1}}{1 - h_{n-1}}, \tag{8}$$

$$\eta_n < 2h_{n-1}^2 \eta_{n-1}, \tag{9}$$

$$h_h \leqslant 4h_{n-1}^3, \tag{10}$$

$$R_n = \left[\frac{N}{M^2 B_n}(2 + h_n) + 3\right](1 + h_n). \tag{11}$$

(9) совместно с (10) дает

$$\eta_n \leqslant \frac{1}{2^n}(2h_0)^{3^n - 1}\eta_0. \tag{12}$$

Далее, зная, что $|x_{n+1} - x_n| \leqslant \eta_n$, и пользуясь (12), будем иметь

$$|x_{n+p} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{3^n-1}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right)\eta_0. \tag{13}$$

Следовательно, существует $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Переходя к пределу в (13) при $p \to \infty$, получим

$$|x^* - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}(2h_0)^{3^n-1}\eta_0. \tag{14}$$

При $n = 0$ имеем $|x - x_0| \leqslant 2\eta_0$. Это дает нам область существования решения и область, где надо вычислить величины M и N. Далее, зная, что

$$\left|\left\{1 - \frac{P''(x_n)\,P(x_n)}{2\,[P'(x_n)]^2}\right\}P(x_n)\right| \leqslant \left(1 + \frac{h_{n-1}}{2}\right)\frac{1}{B_n} < \frac{5}{4B_0}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$, переходя к пределу в уравнении (2) при $n \to \infty$, докажем, что x^* является решением уравнения $P(x) = 0$.

Имеет место следующая теорема единственности решения:

Теорема 2. *При выполнении условий* 1) — 5) *в области* $|x - x_0| < \sqrt{2}\,\eta_0$ *уравнение* (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Полагая $f_n(x) = P(x)\left[1 - \frac{P''(x_n)}{P'(x_n)}\frac{x - x_n}{2}\right]$, для любого решения τ уравнения $P(x) = 0$, согласно (2), будем иметь

$$f_n'(x_n)(\tau - x_{n+1}) + \frac{f_n'''(\xi_n)}{6}(\tau - x_n)^3 = 0.$$

Отсюда, пользуясь ранее установленными оценками, нетрудно доказать справедливость неравенства

$$|\tau - x_{n+1}| \leqslant \frac{2^{2n-2}}{\eta_0^2}|\tau - x_n|^3. \tag{15}$$

Далее, предполагая, что $|\tau - x_0| \leqslant \rho\eta_0$, на основании (14) методом индукции легко доказывается неравенство

$$|\tau - x_{n+1}| \leqslant 2^{2\sum\limits_{k=0}^{n-2}(n-k-1)3^k - 3^n)}\rho^{3^{n+1}}\eta_0 = 2^{-\frac{2n+1+3^{n+1}}{2}}\rho^{3^{n+1}}\eta_0 \quad (n \geqslant 2).$$

Следовательно, если $\rho \leqslant \sqrt{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}|\tau - x_{n+1}| = 0$, т. е. $\tau = x^*$.

Примечание. Аналогично теоремам, установленным Л. В. Канторовичем ([1, 2]) для процесса Ньютона, теоремы 1 и 2 дают не только установление сходимости определенного алгоритма, но представляют теоремы о существовании, единственности, области расположения решения и быстроте сходимости процесса. В силу очень быстрой сходимости процесса (2) практически для приближенного вычисления корней уравнения $P(x)=0$ даже с большой точностью бывает вполне достаточным ограничиться первым или вторым приближением. Выполнимость условий 1) — 5) обеспечивается, как и в процессе Ньютона, соответствующим выбором начального приближения x_0.

Очевидно, область сходимости процесса касательных гипербол, полученная теоремой 1, несколько расширена, а область единственности, установленная теоремой 2, несколько сужена по сравнению с истинными границами этих областей.

В случае процесса Ньютона Л. В. Канторович установил точные границы последних. Поэтому было бы интересно уточнить эти результаты также для процесса касательных гипербол.

Видимо, условие 5) можно было бы ослабить.

Пример 1. Для уравнения

$$x^5+4x^4-2x^3+10x^2-2x-962=0 \quad ([10]),$$

выбирая $x_0=3,1$, имеем $h_0=0,41958<{}^1/_2$ и $R_0=5,83<9$. При этом уже первое приближение дает $x_1\cong 3,35557$ ($x^*=3,3548487\ldots$). Однако в случае процесса Ньютона для выбранной точки $x_0=3,1$ условия теоремы Л. В. Канторовича не выполняются.

Пример 2. Для уравнения

$$x \lg_{10} x-4,7772393=0 \quad ([10]),$$

полагая $x_0=6$, имеем $h_0=0,00548<{}^1/_2$ и $R_0=8,66<9$, и первое приближение дает $x_1\cong 6,089112$ ($x^*=6,089114$). При этом же выбранном начальном приближении процесс Ньютона дает $x_1\cong 6,08936$. Следовательно, значение корня, вычисленное процессом касательных гипербол, в данном случае уже при первом приближении дает приближение к истинному значению корня почти в 100 раз более точное, чем полученное процессом Ньютона.

Физико-технический институт
Казанского филиала
Академии наук СССР

Поступило
10 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Усп. матем. наук, 3, 6, 170 (1948). [2] Л. В. Канторович, Тр. Матем. ин-та им. Стеклова, 28, 104 (1949). [3] Л. В. Канторович, ДАН, 76, 17 (1951). [4] M. Fréchet, Ann. Ecole norm., 293 (1925). [5] A. Cauchy, Leçons sur le calcul différentiel, Paris, 1829. [6] А. Островский, Матем. сборн., 2, 1073 (1937). [7] E. Schröder, Math. Ann., 2 (1870). [8] G. Faber, Journ. f. reine u. angew. Mathem., 138 (1910). [9] E. Bodewig, Quarterly Journ. Appl. Math., 7, 325 (1949). [10] Э. Уиттекер и Робинсон, Матем. обработка результатов наблюдений, 1938.