Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

С. Н. КИРО

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right)$$

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 6 II 1952)

Основным методом доказательства теорем существования аналитических решений дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях является классический метод мажорации Коши — Ковалевской (Коши, Ковалевская, Рикье, Гурса, Леднев и др.). В работе Н. А. Леднева [1], содержащей наиболее общие результаты, этот метод использован с наибольшей полнотой. Не охватываемые теоремой Леднева результаты Н. М. Гюнтера [2] и С. Л. Соболева [3] для двух частных случаев уравнений получены на основе оригинального видоизменения, данного Н. М. Гюнтером [2], классического метода мажорации Коши — Ковалевской. Специальная мажорация Н. М. Гюнтера вызывает интерес также и тем, что она, представляя принципиальный шаг в развитии метода Коши — Ковалевской, может служить источником новых результатов.

Здесь будет показано, как с помощью некоторого обобщения специальной мажорации Н. М. Гюнтера может быть доказана теорема существования аналитического решения указанного в заглавии уравнения.

Теорема. *Уравнение*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right), \tag{1}$$

правая часть которого аналитична в окрестности некоторой системы начальных значений ее аргументов, имеет, и притом единственное, аналитическое в окрестности начальной точки решение $u(x_1, \ldots, x_n)$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$u(x_1^0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n),\ u(x_1, x_2^0, x_3, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_3, \ldots, x_n),$$

где $\varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ *и* $\psi(x_1, x_3, \ldots, x_n)$ — *аналитические функции своих аргументов в окрестности их начальных значений, такие, что* $\varphi(x_2^0, x_3, \ldots, x_n) \equiv \psi(x_1^0, x_3, \ldots, x_n)$, *если выполнено условие*

$$4\, \frac{\partial f^0}{\partial u''_{x_1 x_1}} \frac{\partial f^0}{\partial u''_{x_2 x_2}} - 1 \text{ не равно положительному числу} \tag{2}$$

(здесь нуль при производных означает, что берутся их значения в начальной точке).

Простейшими подстановками задача сводится к нулевой начальной точке и нулевым начальным условиям, после чего путем прибавления и вычитания в правой части уравнения (1) выделенной линейной части оно приводится к следующему:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\lambda(x_3, \ldots, x_n)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\lambda(x_3, \ldots, x_n)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} +$$

$$+ F\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right), \qquad (3)$$

где

$$\lambda(x_3, \ldots, x_n) = 2\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u''_{x_1 x_1}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} \left(\frac{\partial f}{\partial u''_{x_2 x_2}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}},$$

а F — аналитическая функция всех своих аргументов в окрестности нулевой начальной точки, такая, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial u''_{x_1 x_1}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} \equiv 0, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial u''_{x_2 x_2}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} \equiv 0, \qquad F_{\substack{x_1=0\\x_2=0}} \equiv 0. \qquad (4)$$

Принципиальное значение для дальнейшего имеет тот факт, что решение уравнения (3) ищется не в виде ряда

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu_1, \ldots, \mu_n = 3}^{\infty} a_{\mu_1, \ldots, \mu_n} x_1^{\mu_1} \ldots x_n^{\mu_n},$$

как это обычно делается, а в виде

$$u(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu+1} a_{\mu-\nu+1, \nu}(x_3, \ldots, x_n) x_1^{\mu-\nu+1} x_2^{\nu}, \qquad (5)$$

так что для его построения оказывается достаточным дифференцировать уравнение (3) и начальные условия по x_1 и x_2 с последующей подстановкой в результат дифференцирования $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ (из нулевых начальных условий вытекает, что $a_{\mu+1, 0}(x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$ и $a_{0, \mu+1}(x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$ для всех μ). Итак, для определения неизвестных коэффициентов $a_{\mu-\nu+1, \nu}(x_3, \ldots, x_n) = \frac{1}{(\mu-\nu+1)!\,\nu!}\left(\frac{\partial^{\mu+1} u}{\partial x_1^{\mu-\nu+1} \partial x_2^{\nu}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}$ получается следующая система уравнений:

$$(\mu - \nu + 1)!\,\nu!\,a_{\mu-\nu+1, \nu}(x_3, \ldots, x_n) =$$

$$= \frac{\lambda(x_3, \ldots, x_n)}{2} (\mu - \nu + 2)!\,(\nu - 1)!\,a_{\mu-\nu+2, \nu-1}(x_3, \ldots, x_n) +$$

$$+ \frac{\lambda(x_3, \ldots, x_n)}{2} (\mu - \nu)!\,(\nu + 1)!\,a_{\mu-\nu, \nu+1}(x_3, \ldots, x_n) + \left(\frac{\partial^{\mu-1} F}{\partial x_1^{\mu-\nu} \partial x_2^{\nu-1}}\right)_{\substack{x_1=0\\x_2=0}}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, \mu),$$

свободные члены которой представляют собой значения при $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$ производных функций F, взятых с учетом зависимости аргументов последней от x_1 и x_2, и, как легко показать на основе тождеств (4), зависят только от тех коэффициентов ряда (5), для которых сумма индексов меньше либо равна μ. Следовательно, из этой системы могут быть определены коэффициенты $a_{\mu-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n)$ с суммой индексов, равной $\mu+1$, если уже определены коэффициенты с суммой индексов, меньшей или равной μ, и определитель системы

$$P_\mu[\lambda(x_3, \ldots, x_n)] =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & 0\ldots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & -1 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & \ldots 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & -1 & \ldots 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0\ldots & -1 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0\ldots & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & -1 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} \\ 0 & 0 & 0\ldots & 0 & \frac{\lambda(x_3,\ldots,x_n)}{2} & -1 \end{vmatrix},$$

порядок которого равен μ, отличен от нуля.

Дополнительное исследование ((2), стр. 30) показывает, что выполнение условия (2) гарантирует отличие в некоторой окрестности начальной точки определителя $P_\mu[\lambda(x_3, \ldots, x_n)]$ от нуля для всех μ, что разрешает построить формальное решение (5). Кроме того, при этом удается показать, что

$$\sum_{k=1}^{\mu} \max_{|x_3+\ldots+x_n| \leqslant r} \left| \frac{A_{\nu,k}^{(\mu)}[\lambda(x_3, \ldots, x_n)]}{P_\mu[\lambda(x_3, \ldots, x_n)]} \right| < H^*$$

для всех ν и μ (через $A_{\nu,k}^{(\mu)}[\lambda(x_3, \ldots, x_n)]$ обозначено алгебраическое дополнение $P_\mu[\lambda(x_3, \ldots, x_n)]$, которое соответствует элементу, стоящему на пересечении столбца с номером ν и строки с номером k; H — некоторая постоянная).

Мажорирующим уравнением уравнения (1) является следующее:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{H}{1 - \frac{x_3+\ldots+x_n}{r}} \times$$

$$\times \Phi\left(x_1, \ldots, x_n;\ v;\ \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial x_n^2}, \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_3}, \ldots, \frac{\partial^2 v}{\partial x_{n-1} \partial x_n}\right),$$

где $\Phi \gg F$. На основе теоремы Н. А. Леднева ((1), стр. 212) заключаем, что это уравнение имеет аналитическое решение $v(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющее начальным условиям: $v(0, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \varphi(x_2, x_3, \ldots, x_n) \gg 0$ и $v(x_1, 0, x_3, \ldots, x_n) = \psi(x_1, x_3, \ldots, x_n) \gg 0$, причем $\varphi(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv \psi(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$, $\varphi'_{x_2}(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$, $\varphi''_{x_2 x_2}(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$, $\psi'_{x_1}(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$ и $\psi''_{x_2 x_1}(0, x_3, \ldots, x_n) \equiv 0$

* При выводе соответствующей оценки Н. М. Гюнтер основывается на неверной формуле ((2), стр. 35, строка 5-я снизу) и наименьшем значении некоторого выражения вместо его наибольшего значения (стр. 37). Эти погрешности, равно как и остальные замеченные (неточное задание начальных условий на стр. 40 и др.), удается устранить с помощью дополнительных рассуждений.

(именно такой выбор начальных условий разрешает согласовать последующие выкладки). Записав указанное решение v и функции F и Φ в виде

$$v = \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu+1} A_{\mu-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n)\, x_1^{\mu-\nu+1} x_2^{\nu}, \tag{6}$$

$$F = \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} b_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n)\, x_1^{\mu-\nu-1} x_2^{\nu}, \tag{7}$$

$$\Phi = \sum_{\mu=2}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\mu-1} B_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n)\, x_1^{\mu-\nu-1} x_2^{\nu}, \tag{8}$$

можно доказать, что если

$$b_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \ll B_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n), \tag{9}$$

то

$$a_{\mu-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \ll A_{\mu-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n), \tag{10}$$

а если

$$a_{\omega-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \ll A_{\omega-\nu+1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \quad (\omega < \mu, \quad 0 \leqslant \nu \leqslant \omega), \tag{11}$$

то

$$b_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \ll B_{\mu-\nu-1,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \tag{12}$$

(в работе Гюнтера коэффициенты рядов (5), (6), (7), (8) — числа, так что там соотношения, соответствующие двойным неравенствам (9), (10), (11) и (12), имеют вид простых неравенств). После того как непосредственным вычислением показано, что

$$a_{3-\nu,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \ll A_{3-\nu,\,\nu}(x_3, \ldots, x_n) \quad (\nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

повторным использованием соотношений (9) и (10), (11) и (12) доказывается, что

$$u(x_1, \ldots, x_n) \ll v(x_1, \ldots, x_n),$$

откуда следует сходимость формального решения.

Этим заканчивается доказательство сформулированной теоремы.

Аналогично доказывается соответствующая теорема существования аналитических решений системы уравнений

$$f_k\left(x_1, \ldots, x_n;\ u_1, \ldots, u_{m+l};\ \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_1}{\partial x_n}, \ldots, \frac{\partial u_{m+l}}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_{m+l}}{\partial x_n}\right) = 0$$

$$(k = 1,\ 2, \ldots,\ m + l),$$

распространяющая результат С. Л. Соболева ([3], стр. 146) на случай неизвестных функций n независимых переменных. Из нее, в частности, вытекает классическая теорема существования С. В. Ковалевской.

В заключение выражаю сердечную благодарность проф. Н. А. Ледневу, предложившему тему настоящей работы в качестве диссертационной и сделавшему весьма ценные указания при ее выполнении.

Одесский государственный университет
им. И. И. Мечникова

Поступило
30 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. А. Леднев, Матем. сборн., **22** (64): 2, 205 (1948). [2] Н. М. Гюнтер, Матем. сборн., **32**: I, 26 (1924). [3] С. Л. Соболев, Матем. сборн., **39**: 3—4, 107 (1931).