Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О ПРОДОЛЖЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 11 XII 1951)

В этой заметке, как и в работах [1,2], мы будем рассматривать класс $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}(M_1,\ldots,M_n)=H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ функций $f=f(x_1,\ldots,x_n)$, заданных в пространстве R_n точек $(x_1,\ldots,x_n)$ с действительными координатами, где $1\leqslant p\leqslant\infty$, $r_i>0$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Положим $r_i=\bar{r}_i+\alpha_i$, где $\bar{r}_i$ — целое и $0<\alpha_i\leqslant 1$. Функция f принадлежит к этому классу, если она интегрируема по пространству R_n в p-й степени (при $p=\infty$ ограничена) и (после возможного видоизменения на множестве меры нуль) удовлетворяет условиям:

1) почти для всех $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ соответствующего $n-1$-мерного подпространства f имеет по x_i абсолютно непрерывную частную производную порядка $\bar{r}_i-1$;

2) частная производная $f_{x_i}^{(\bar{r}_i)}$ по x_i порядка $\bar{r}_i$, существующая по 1), почти всюду интегрируема по R_n в p-й степени и выполняется неравенство

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_i,\ldots,x_n)-\right.$$
$$\left.-f(x_1,\ldots,x_n)|^p\,dx_1\ldots dx_n\right)^{1/p}\leqslant M_i|h|^{\alpha_i},$$

если $\alpha_i<1$,

или

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i+h,x_{i+1},\ldots,x_n)-2f(x_1,\ldots,x_n)+\right.$$
$$\left.+f(x_1,\ldots,x_{i-1},x_i-h,x_{i+1},\ldots,x_n)|^p\,dx_1\ldots dx_n\right)^{1/p}\leqslant M_i|h|,$$

если $\alpha_i=1$.

В работе [2] была доказана теорема (12), частный случай которой (при $p=p'$ и $m<n$) мы сейчас сформулируем с некоторым добавлением.

Теорема 1. *Пусть функция f принадлежит к классу $H_p^{(r_1,\ldots,r_n)}$ и*

$$\varkappa=1-\frac{1}{p}\sum_{m+1}^{n}\frac{1}{r_i}>0. \tag{1}$$

Тогда при любых фиксированных $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *эта функция (после видоизменения ее на множестве меры нуль), рассматриваемая как функция от переменных* $(x_1, \ldots, x_m)$, *будет принадлежать к классу* $H_p^{(\rho_1, \ldots, \rho_n)}$, *где*

$$\rho_k = r_k \varkappa \quad (k = 1, \ldots, m), \tag{2}$$

и для частных производных порядков $l = 0, 1, \ldots, \bar{r}_i$ *по переменным* x_i $(i = 1, \ldots, m)$ *выполняются равенства*:

$$\lim \left(\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \left| f_{x_i}^{(l)}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - f_{x_i}^{(l)}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \right|^p dx_1 \ldots dx_m \right)^{1/p} = 0,$$

$$\text{когда } \sum_{m+1}^{n} | x_k - x_k^{(0)} | \to 0, \tag{3}$$

для любых $(x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$.

Оказывается, эта теорема в известном смысле обратима; именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $1 \leqslant m < n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и заданы положительные числа* $r_1, \ldots, r_n$ *и* $\rho_1, \ldots, \rho_m$, *для которых выполняются* (1) *и* (2), *и пусть функция* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ *от* m *переменных принадлежит к классу* $H_p^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}(M_1, \ldots, M_m)$.

Тогда можно построить функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, *обладающую следующими свойствами*:

1) $f \in H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$;

2) $f(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$;

3) f *при любых* $(x_{m+1}, \ldots, x_n)$ *принадлежит по* $(x_1, \ldots, x_m)$ *к* $H_p^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}$ *и выполняются равенства* (3);

4) $\| f \|_p^{(n)} \leqslant c_1 \| \varphi \|_p^{(m)} + c_2 \sum_1^m M_k$, *где* c_1 *и* c_2 — *положительные константы, не зависящие от* φ, *а значки* (n) *и* (m) *показывают, что норма берется по* R_n *или* R_m.

Доказательство. Пусть $\varphi \in H_p^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}$.

Обозначим через $g_s = g_s(x_1, \ldots, x_m)$ $(s = 1, 2, \ldots)$ целую функцию степени $\nu_i = 2^{s/r_i}$, соответственно по x_i наилучшую для φ в смысле $L_p^{(m)}$. Тогда (см. [2], теорема 7)

$$\| \varphi - g_s \|_p^{(m)} \leqslant \frac{d \sum_1^m M_k}{2^{s\varkappa}}, \tag{4}$$

где d — константа. Следовательно, функция φ разлагается в сходящийся к ней в смысле $L_p^{(m)}$ ряд

$$\varphi = \sum_1^{\infty} Q_s, \quad Q_1 = g_1, \quad Q_s = g_s - g_{s-1} \quad (s = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

причем

$$\| Q_s \|_p^{(m)} \leqslant \frac{2d \sum_1^m M_k}{2^{(s-1)\varkappa}}. \tag{6}$$

Введем в рассмотрение целые функции

$$F(k, x) = \frac{4}{k^2} \frac{\sin^2 \frac{kx}{2}}{x^2} \qquad (n = 1, 2, \dots)$$

степени k. Для них имеет место

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} |F(k, x)|^p \, dx \right)^{1/p} = \frac{A}{k^{1/p}}, \quad F(k, 0) = 1, \tag{7}$$

где A — константа. Рассмотрим ряд

$$f(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n) = \sum_1^{\infty} Q_s \prod_{m+1}^{n} F(2^{s/r_i}; x_i) = \sum_1^{\infty} R_s. \tag{8}$$

Под суммой его мы будем понимать функцию f, к которой он сходится при любых $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ в смысле $L_p^{(m)}$, что имеет место, так как на основании (6) и в силу неравенств $|F(k, x)| \leqslant 1$ справедливо

$$\sum_1^{\infty} \| R_s \|_p^{(m)} \leqslant \sum_1^{\infty} \| Q_s \|_p^{(m)} < \infty.$$

Функцию f, очевидно, можно рассматривать также как сумму этого же ряда, сходящегося к ней в смысле $L_p^{(n)}$, так как, в силу (6):

$$\| R_s \|_p^{(n)} \leqslant \| Q_s \|_p^{(m)} \frac{A^{n-m}}{2^{\frac{s}{p} \sum\limits_{m+1}^{n} \frac{1}{r_i}}} \leqslant \frac{c \sum\limits_1^m M_k}{2^s} \quad (s = 2, 3, \dots), \tag{9}$$

откуда

$$\left\| f - \sum_1^{\mu - 1} R_s \right\|_p^{(n)} \leqslant \frac{2c \sum\limits_1^m M_k}{2^{\mu}};$$

и так как функция $\sum\limits_1^{\mu-1} R_s$ есть целая степеней $2^{\mu/r_i}$ соответственно по x_i $(i = 1, \dots, n)$, то (см. (²), теорема 10) $f \in H_p^{(r_1, \dots, r_n)}$.

Свойство 2) функции f вытекает из (8) и (5).

То обстоятельство, что f по переменным $(x_1, \dots, x_m)$ принадлежит к $H_p^{(\rho_1, \dots, \rho_m)}$, следует на основании (6) из неравенств

$$\left\| f - \sum_1^{\mu-1} R_s \right\|_p^{(m)} \leqslant \frac{c_1 \sum\limits_1^m M_k}{2^{\mu \varkappa}} = \frac{c_2}{2^{\frac{\mu}{r_i} \rho_i}},$$

если снова принять во внимание, что функция $\sum\limits_1^{\mu-1} R_s$ есть целая степени $2^{\mu/r_i}$ по x_i $(i = 1, \dots, m)$.

Докажем теперь выполнение для нашей функции равенств (3).

$$\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| f_{x_i}^{(l)}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f_{x_i}^{(l)}(x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}) \right|^p dx_1 \ldots dx_m \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_1^{\mu} \| Q_s^{(l)} \|_p^{(m)} \left| \prod_{m+1}^{\mu} F\left(2^{\frac{s}{r_i}}, x_i\right) - \prod_{m+1}^{n} F\left(2^{\frac{s}{r_i}}, x_i^{(0)}\right) \right| + 2 \sum_{\mu+1}^{\infty} \| Q_s^{(l)} \|_p^{(m)} = s_\mu + \sigma_\mu.$$

На основании обобщенного неравенства С. Н. Бернштейна (см. ([2]), лемма 1)

$$\| Q_{sx_i}^{(l)} \|_p^{(m)} \leqslant 2^{\frac{ls}{r_i}} \| Q_s \|_p^{(m)} \leqslant \frac{c \sum_1^m M_k}{2^{s\left(\varkappa - \frac{l}{r_i}\right)}},$$

где $\varkappa - \frac{l}{r_i} > \varkappa - \frac{\rho_i}{r_i} = 0$. Поэтому $\sigma_\mu < \varepsilon$, если μ достаточно велико. С другой стороны, при фиксированном μ, очевидно, $s_\mu \to 0$, если $\sum_{m+1}^{\mu} | x_k - x_k^{(0)} | \to 0$.

Наконец, свойство 4) вытекает из (9) и из неравенства (4) при $s = 1$, в силу которого

$$\| R_1 \|_p^{(n)} \leqslant c' \| g_1 \|_p^{(m)} \leqslant c' \left(\| \varphi \|_p^{(m)} + \frac{d \sum_1^m M_k}{2^{\varkappa}} \right).$$

Примечание. Заметим, что существуют функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащие к $H_p^{(\rho_1, \ldots, \rho_m)}$, но не принадлежащие к $H_p^{(\rho_1', \ldots, \rho_m')}$, каковы бы ни были ρ_k', такие, что

$$\rho_k' \geqslant \rho_k, \quad \sum_1^m (\rho_k' - \rho_k) > 0 \tag{10}$$

Отсюда из теоремы 2 вытекает существование функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, принадлежащей к $H_p^{(r_1, \ldots, r_n)}$, но не принадлежащей по переменным $(x_1, \ldots, x_m)$ к $H_p^{(\rho_1', \ldots \rho_m')}$, где ρ_k' удовлетворяет условиям (10).

Поступило
16 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Никольский, ДАН, 76, 785 (1951). [2] С. М. Никольский, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР, 38, 244 (1951).