Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. НАЙМАРК

ОБ ИНДЕКСЕ ДЕФЕКТА ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 30 XI 1951)

Рассмотрим линейное дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y,$$

$$0 < x < +\infty,$$

где $\frac{1}{p_0}$, $p_1, \ldots, p_n$ — измеримые вещественные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $[0, a]$, $a > 0$.

Выражение $l(y)$ следующим образом определяет замкнутый симметрический оператор L в пространстве $L^2(0, \infty)$. Пусть ϑ' обозначает совокупность всех функций y, равных нулю вне некоторого интервала $[\varepsilon, a]$, $0 < \varepsilon < a$ (своего для каждой из таких функций), для которых выражение $l(y)$ имеет смысл и принадлежит $L^2(0, \infty)$. Соответствие $y \to l(y)$ будет тогда оператором в $L^2(0, \infty)$ с областью определения ϑ'; его замыкание и есть L (подробно см., например в (1) добавление II).

Как известно, при любом недействительном λ уравнение

$$l(y) = \lambda y$$

имеет решения, принадлежащие $L^2(0, \infty)$, причем максимальное число m линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(0, \infty)$, не зависит от λ. Пара чисел (m, m) называется индексом дефекта оператора L.

Случай дифференциального выражения второго порядка ($n = 1$)

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p_0 \frac{dy}{dx}\right) + p_1 y$$

был подробно изучен Г. Вейлем (6); в частности, Вейль показал, что в этом случае $m = 1$ (так называемый случай точки) или $m = 2$ (случай круга). С тех пор дифференциальный оператор второго порядка был предметом исследования многих авторов; ряд таких исследований был посвящен выяснению зависимости между классом оператора второго порядка ($m = 1$ или $m = 2$) и поведением функций p_0 и p_1. В дальнейшем были предприняты попытки обобщить основной результат Вейля В. Виндау (7) для случая четвертого порядка и Д. Шином (8) для любого порядка.

Однако оба автора в своих рассуждениях ошибочно утверждали, что для индекса дефекта оператора $2n$-го порядка либо $m=n$, либо $m=2n$. Ошибочность этих утверждений впервые доказал И. М. Глазман [2], который привел примеры дифференциальных операторов, для которых m может быть **любым числом**, удовлетворяющим неравенствам $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Однако до сих пор оставался открытым вопрос о зависимости числа m от поведения функций $p_0, p_1, \ldots, p_n$ в случае оператора произвольного четного порядка. Этой зависимости посвящены излагаемые ниже теоремы. Во всех этих теоремах предполагаются выполненными условия, сформулированные в начале заметки.

Теорема 1. *Если существуют постоянные* $a_0 \neq 0,\ a_1, \ldots, a_n$ *такие, что функции*

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{a_0},\ p_1 - a_1, \ldots, p_n - a_n$$

суммируемы в интервале $(0, \infty)$, *то индекс дефекта оператора* L *есть* (n, n).

Теорема 2. *Если функции*

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)',\ p_1, p_2, \ldots, p_n$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$ *и если*

$$\lim_{x \to +\infty} p_0(x) > 0,$$

то индекс дефекта оператора L *есть* (n, n).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия*:

1) $|p_n| \to \infty$ *при* $x \to +\infty$;

2) $p_n',\ p_n''$ *не меняют знака в интервале* $[x_0, +\infty)$ *при* x_0 *достаточно большом*;

3) *при* $x \to +\infty$

$$p_n' = O(|p_n|^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n};$$

4) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0},\ p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}},\ p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}}, \ldots, p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[0, +\infty)$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$ *.

Если тогда $p_n \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$, *то индекс дефекта оператора* L *есть* (n, n).

Если же $p_n \to -\infty$ *при* $x \to +\infty$, *то индекс дефекта оператора* L *есть* $(n+1, n+1)$ *или* (n, n), *в зависимости от того, сходится ли или расходится интеграл*

$$\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx.$$

При $n = 1$ эта теорема переходит в известный результат для дифференциальных операторов второго порядка (см., например, [5] глава V).

* Условие 5) в действительности является только нормировкой, ибо из суммируемости функции p_0'/p_0 вытекает, что существует $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0 \neq 0$.

Теорема 4. *Пусть при x_0 достаточно большом функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ непрерывны в интервале $[x_0, +\infty)$ и пусть существуют пределы*

$$\lim_{x\to+\infty} p_0 = a_0, \quad \lim_{x\to+\infty} p_1 = a_1, \ldots, \lim_{x\to+\infty} p_n = a_n,$$

причем $a_0 \neq 0$. Тогда индекс дефекта оператора L есть (n, n).

Теорема 5. *Пусть при x_0 достаточно большом функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ непрерывны в интервале $[x_0, \infty)$, причем в этом интервале $0 < p_0 \leqslant c$, где c — положительная постоянная. Пусть, кроме того,*

$$\frac{p_0'}{p_0} \to 0, \quad p_0^{-\frac{1}{2n}} p_1 \to 0, \quad p_0^{-\frac{3}{2n}} p_1 \to 0, \ldots, p_0^{-\frac{2n-1}{2n}} p_n \to 0$$

при $x \to +\infty$. Тогда индекс дефекта оператора L есть (n, n).

Теорема 6. *Пусть выполнены условия:*

1) *функции*

$$p_0, p_1, \ldots, p_n, p_0', p_n', p_n''$$

непрерывны в интервале $[x_0, \infty)$ при x_0 достаточно большом;

2) $p_0 > 0$ *в интервале* $[x_0, \infty)$;

3) $|p_n| \to \infty$ *при* $x \to +\infty$;

4) *функции p_n', p_n'' сохраняют знак в интервале $[x_0, \infty)$ и при $x \to +\infty$*

$$p_n' = O(|p_n|^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n};$$

5) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0}, \quad p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}} p_0^{-1+\frac{1}{2n}}, \quad p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}} p_0^{-1+\frac{3}{2n}}, \ldots$$

$$\ldots, p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}} p_0^{-1+\frac{2n-3}{2n}}, \quad p_n'' |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} p_0^{\frac{1}{2n}}$$

стремятся к нулю при $x \to +\infty$;

6) *функция $p_0 p_n^{2n-1}$ ограничена в интервале $[x_0, \infty)$.*

Если тогда $p_n \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то индекс дефекта оператора L есть (n, n); если же $p_n \to -\infty$ при $x \to +\infty$, то индекс дефекта оператора L есть $(n+1, n+1)$ или (n, n), в зависимости от того, сходится ли или расходится интеграл

$$\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} p_0^{-\frac{1}{2n}} dx.$$

При доказательстве этих теорем используются некоторые результаты об асимптотическом поведении решений уравнения $l(y) = \lambda y$ при $x \to +\infty$, в частности, результаты О. Перрона ([3]) и И. М. Рапопорта ([4]).

Теоремы 1—6 можно несколько обобщить, если воспользоваться следующим простым замечанием.

Если A — замкнутый симметрический оператор, а B — ограниченный эрмитов оператор, то операторы A и $A + B$ имеют один и тот же индекс дефекта.

Так например, вместо теоремы 4 мы получим тогда:

Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ те же, что и в теореме 4, а функция p_n существенно ограничена в интервале $[x_0, \infty)$ при x_0 достаточно большом. Тогда индекс дефекта оператора L есть (n, n).

В частности:

Если вещественная функция $p(x)$ суммируема в каждом интервале $[0, a]$, $a > 0$, и существенно ограничена в некотором интервале $[x_0, \infty)$, $x_0 > 0$, то индекс дефекта оператора L, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + py,$$

есть (n, n).

Поступило
17 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. И. Ахиезер и И. М. Глазман, Теория линейных операторов, 1950. [2] И. М. Глазман, ДАН, **64**, № 2 (1949). [3] O. Perron, Journ. f. reine u. angew. Math., **142** (1913). [4] И. М. Рапопорт, ДАН, 78, № 6 (1951); **79**, № 1 (1951). [5] E. C. Titchmarsh, Eigenfunction Expansions, Oxford, 1946. [6] H. Weyl, Math. Ann., 68 (1909). [7] W. Windau, ibid., **83** (1921). [8] Д. Шин, ДАН, **18**, № 8 (1938); Матем. сборн., 7 (49) : 1 (1940); 13 (55) : 1 (1943).