Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Б. В. КАЗАЧКОВ

ОБ ОДНОЙ ЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ В ТЕОРИИ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 2 II 1952)

§ 1. Давно уже внимание советских алгебраистов привлекает вопрос о доказательстве так называемых локальных теорем, т. е. теорем, утверждающих справедливость некоторого свойства для данной группы из справедливости того же свойства для всех ее подгрупп с конечным числом образующих ([1], § 6).

В настоящей статье сообщается полученная нами в результате исследования теорем типа Силова — Холла — Чунихина локальная теорема для свойства конечной П-сопряженности (определение 1). Эта теорема обобщает для некоторых классов бесконечных групп основное утверждение известной теоремы Дицмана — Куроша — Узкова [2], она обобщает также теоремы 5 и 7 нашей работы [3].

§ 2. Пусть П—произвольное непустое множество простых чисел, конечное или бесконечное.

Определение 1. Будем говорить, что группа $\mathfrak{G}$ обладает свойством конечной П-сопряженности, если в ней либо не содержится ни одного конечного класса сопряженных силовских П-подгрупп, либо из существования такого класса вытекает сопряженность всех вообще ее силовских П-подгрупп.

Очевидно, что всякая группа обладает свойством конечной P-сопряженности для любого простого числа P.

Определение 2 ([1], § 6). Множество L подгрупп группы $\mathfrak{G}$ называется локальной системой подгрупп этой группы, если: а) всякий элемент группы $\mathfrak{G}$ содержится хотя бы в одной подгруппе из L; б) любые 2 подгруппы из L (а поэтому и любое конечное число таких подгрупп) содержатся в некоторой подгруппе из L.

Определение 3. Будем говорить, что группа $\mathfrak{G}$ локально обладает свойством конечной П-сопряженности, если в ней можно указать хотя бы одну такую локальную систему подгрупп, что все подгруппы, в нее входящие, обладают свойством конечной П-сопряженности.

Примером групп, локально обладающих свойством конечной П-сопряженности, могут служить локально разрешимые группы или рассмотренные нами в работе [3] локально $\Pi - S$-группы.

Определение 4 [4]. Всякий элемент конечного порядка произвольной группы $\mathfrak{G}$, все простые делители порядка которого входят в П, будем называть П-элементом.

§ 3. Локальная теорема для свойства конечной П-сопряженности. *Всякая группа, локально обладающая свойством конечной* П-*сопряженности, сама обладает этим свойством.*

Доказательство. Пусть группа $\mathfrak{G}$ локально обладает свойством конечной П-сопряженности. Обозначим существующую в ней локальную систему подгрупп, соответствующую указанному свойству, через L. Пусть, далее, группа $\mathfrak{G}$ содержит некоторый конечный класс сопряженных силовских П-подгрупп:

$$\mathfrak{M},\ c_2^{-1}\mathfrak{M}c_2, \ldots, c_n^{-1}\mathfrak{M}c_n. \tag{1}$$

Нормализаторы этих подгрупп также образуют полный класс сопряженных подгрупп:

$$N_{\mathfrak{M}},\ c_2^{-1}N_{\mathfrak{M}}c_2, \ldots, c_n^{-1}N_{\mathfrak{M}}c_n. \tag{2}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ пересечение всех силовских П-подгрупп класса (1), а через $\mathfrak{N}$ — пересечение всех нормализаторов класса (2). Очевидно, что $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{N}$ суть нормальные делители в $\mathfrak{G}$, причем, в силу известной теоремы Пуанкаре, подгруппа $\mathfrak{N}$ имеет в $\mathfrak{G}$ конечный индекс. Очевидно также, что П-подгруппа $\mathfrak{S}$ содержится в $\mathfrak{N}$ и что, будучи инвариантной, она входит в состав любой силовской П-подгруппы в $\mathfrak{G}$. Покажем, что нормальный делитель $\mathfrak{S}$ является силовской, а значит, и единственной, П-подгруппой в $\mathfrak{N}$.

Предположим противное: пусть существует в $\mathfrak{N}$, например, элемент d, не входящий в $\mathfrak{S}$ и являющийся П-элементом. Этот элемент должен быть перестановочным со всеми силовскими П-подгруппами класса (1); с другой стороны, среди последних подгрупп найдутся такие, в состав которых d не войдет, пусть одна из них $c_i^{-1}\mathfrak{M}c_i$. Произведение $\{d\}(c_i^{-1}\mathfrak{M}c_i)$, где $\{d\}$ — циклическая П-подгруппа, порожденная элементом d, оказывается П-подгруппой, отличной от $c_i^{-1}\mathfrak{M}c_i$, что противоречит предположению о принадлежности $\mathfrak{M}$ к силовским П-подгруппам и доказывает наше утверждение.

Рассмотрим теперь два возможных варианта.

1) $\mathfrak{N} = 1$. Тогда группа $\mathfrak{G}$ оказывается конечной и, следовательно, принадлежащей к локальной системе подгрупп L, ибо каждому из ее элементов, число которых конечно, соответствует подгруппа из L, содержащая этот элемент. Последние же подгруппы, в свою очередь, содержатся также в некоторой подгруппе из L, которая, очевидно, должна совпасть с $\mathfrak{G}$. Но это значит, что $\mathfrak{G}$ обладает свойством конечной П-сопряженности. Теорема верна.

2) $\mathfrak{N} \neq 1$. При этом могущие возникнуть оба крайних случая $\mathfrak{S} = 1$ и $\mathfrak{S} = \mathfrak{N}$ на дальнейшие рассуждения отрицательного влияния не окажут.

Пусть $\mathfrak{M}^*$ — любая силовская П-подгруппа в $\mathfrak{G}$. В силу того, что всякая силовская П-подгруппа из $\mathfrak{G}$ пересекается с подгруппой $\mathfrak{N}$, как легко видеть, по П-подгруппе $\mathfrak{S}$, мы имеем: $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}^* \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{S}$.

Рассмотрим произведения $\mathfrak{M}\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}^*\mathfrak{N}$. Из конечности фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ вытекает конечность ее подгрупп $\mathfrak{M}\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{M}^*\mathfrak{N}/\mathfrak{N}$. По теореме об изоморфизме $\mathfrak{M}\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}/\mathfrak{S}$, $\mathfrak{M}^*\mathfrak{N}/\mathfrak{N} \simeq \mathfrak{M}^*/\mathfrak{S}$, отсюда вытекает конечность индекса подгруппы $\mathfrak{S}$ в $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$. Мы можем записать:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S} + a_2\mathfrak{S} + \cdots + a_k\mathfrak{S}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{M}^* = \mathfrak{S} + b_2\mathfrak{S} + \cdots + b_l\mathfrak{S}. \tag{4}$$

Согласно условию, элементы $a_2, \ldots, a_k$ и элементы $b_2, \ldots, b_l$ входят в некоторые подгруппы, соответственно, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, принадлежащие локальной системе подгрупп L, т. е. обладающие свойством конечной П-сопряженности. При этом очевидно, что $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{A}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{B}\mathfrak{S}$. Подгруппы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, в свою очередь, входят в некоторую третью подгруппу $\mathfrak{H}$ из локальной системы L. Следовательно, мы имеем $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}^* \subseteq \mathfrak{H}\mathfrak{S}$.

Покажем теперь, что все силовские II-подгруппы в подгруппе $\mathfrak{H}$ сопряжены. Для этой цели достаточно показать, что $\mathfrak{H}$ обладает конечным классом сопряженных силовских II-подгрупп. Рассмотрим подгруппу $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$.

Силовская II-подгруппа $\mathfrak{M}$, обладающая конечным классом (1) сопряженных подгрупп в $\mathfrak{G}$, подавно обладает конечным классом сопряженных подгрупп в $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$:

$$\mathfrak{M},\ d_2^{-1}\mathfrak{M}d_2, \ldots, d_r^{-1}\mathfrak{M}d_r. \tag{5}$$

Вернемся к ранее записанному разложению (3). В нем элементы a_i $(i = 2, 3, \ldots, k)$ не входят в $\mathfrak{S}$, но содержатся в подгруппе $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$; они могут быть представлены в виде: $a_i = h_i s_i$, где $h_i \in \mathfrak{H}$, $s_i \in \mathfrak{S}$ для любого $i = 2, 3, \ldots, k$. Поэтому можно разложение (3) записать в следующей форме:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{S} + h_2\mathfrak{S} + \cdots + h_k\mathfrak{S};$$

отсюда вытекает, что элементы h_i $(i = 2, 3, \ldots, k)$ суть II-элементы.

Рассмотрим порожденную ими II-подгруппу $\{h_2, h_3, \ldots, h_k\}$. Она входит в некоторую силовскую II-подгруппу H_1 из $\mathfrak{H}$. При этом имеет место равенство $\mathfrak{M} = H_1\mathfrak{S}$. Покажем конечность класса силовских II-подгрупп, сопряженных с H_1 в $\mathfrak{H}$. Предположим от противного, что этот класс бесконечен:

$$H_1,\ t_\alpha^{-1}H_1t_\alpha,\ t_\beta^{-1}H_1t_\beta, \ldots \tag{6}$$

Ясно, что так как $H_1 \subseteq \mathfrak{M}$, то каждая подгруппа из бесконечного класса (6) входит в одну из подгрупп конечного класса (5). Поэтому всегда найдется такая пара различных силовских II-подгрупп из класса (6) $t_\mu^{-1}H_1t_\mu$ и $t_\nu^{-1}H_1t_\nu$, которая будет входить в одну из силовских II-подгрупп класса (5), например, в $d_i^{-1}\mathfrak{M}d_i$:

$$t_\mu^{-1}H_1t_\mu \subseteq d_i^{-1}\mathfrak{M}d_i, \quad t_\nu^{-1}H_1t_\nu \subseteq d_i^{-1}\mathfrak{M}d_i.$$

Обозначим через H подгруппу, порожденную подгруппами $t_\mu^{-1}H_1t_\mu$ и $t_\nu^{-1}H_1t_\nu$. В силу того, что H входит в $d_i^{-1}\mathfrak{M}d_i$, она является II-подгруппой.

С другой стороны, H входит в $\mathfrak{H}$, это значит, что имеет место совпадение подгрупп $t_\mu^{-1}H_1t_\mu = t_\nu^{-1}H_1t_\nu$. Мы получили противоречие с предположением о том, что эти подгруппы различны, и тем самым доказали конечность класса (6), а значит, согласно условию, и сопряженность всех силовских II-подгрупп в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим, наконец, указанное выше разложение (4) группы $\mathfrak{M}^*$ по подгруппе $\mathfrak{S}$. По аналогии с предыдущим легко видеть, что $\mathfrak{M}^*$ также представится в виде $\mathfrak{M}^* = H_2\mathfrak{S}$, где H_2 — силовская II-подгруппа в $\mathfrak{H}$. Таким образом, мы имеем $\mathfrak{M} = H_1\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{M}^* = H_2\mathfrak{S}$.

Но, по только что доказанному, силовские II-подгруппы H_1 и H_2 в $\mathfrak{H}$ сопряжены: $H_2 = c^{-1}H_1c$. Следовательно, сопряжены и силовские II-подгруппы $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{M}^*$ в данной группе $\mathfrak{G}$: $\mathfrak{M}^* = c^{-1}\mathfrak{M}c$, где $c \in \mathfrak{G}$. Вспоминая, что $\mathfrak{M}^*$ — произвольная силовская II-подгруппа группы $\mathfrak{G}$, окончательно убеждаемся в справедливости теоремы.

§ 4. Следующая теорема является непосредственным следствием предыдущей.

Теорема. *Если всякая подгруппа группы $\mathfrak{G}$, порожденная конечным числом II-элементов, обладает свойством конечной II-сопряженности, то и сама группа $\mathfrak{G}$ обладает этим свойством.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{G}_1$ подгруппу, порожденную всеми П-элементами данной группы и, следовательно, инвариантную в последней, а через L — совокупность всех подгрупп данной группы, порожденных конечным числом П-элементов. Ясно, что L входит в $\mathfrak{G}_1$ и образует в ней локальную систему подгрупп; действительно, всякий элемент из $\mathfrak{G}_1$ представим в виде произведения конечного числа П-элементов и поэтому содержится в некоторой подгруппе из L, всякая же пара подгрупп из L входит в некоторую ее третью подгруппу. Таким образом, согласно доказанной локальной теореме, подгруппа $\mathfrak{G}_1$ обладает свойством конечной П-сопряженности. Очевидно далее, что любая силовская П-подгруппа из данной группы $\mathfrak{G}$ входит в $\mathfrak{G}_1$, а это значит, что сама $\mathfrak{G}$ также обладает свойством конечной П-сопряженности (случай совпадения $\mathfrak{G}_1$ с $\mathfrak{G}$ проведенного рассуждения не нарушает).

Отметим, наконец, что из последней теоремы, в свою очередь, следуют теоремы 5 и 7 нашей работы ([3]) для локально разрешимых и локально П — S-групп.

Томский государственный университет им. В. В. Куйбышева

Поступило 14 XII 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Г. Курош и С. Н. Черников, Успехи матем. наук, 2, в. 3 (19) (1947). [2] А. П. Дицман, А. Г. Курош и А. И. Узков, Матем. сборн., 3 (45), № 1 (1938). [3] Б. В. Казачков, ДАН, 80, № 1 (1951). [4] С. Л. Эдельман, ДАН, 79, № 2 (1951).