

А. М. ВАСИЛЬЕВ

**ОБ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ОПЕРАЦИЯХ, ПРИМЕНЯЕМЫХ  
В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 22 XI 1951)

1. В предыдущем сообщении автора <sup>(1)</sup> показано, что данная Г. Ф. Лаптевым <sup>(2)</sup> схема построения продолжений и охватов представлений групп Ли является достаточной для исследования любой дифференциально-геометрической задачи. Класс привлекаемых при этом представлений можно произвольно ограничивать, в зависимости от целей и характера исследования. Наибольший интерес представляет изучение классов, которые вместе с каждым представлением содержат и его всевозможные продолжения. В настоящей заметке выделяется один такой класс, играющий, повидимому, основную роль во всяком дифференциально-геометрическом исследовании.

2. Пусть дана конечномерная группа Ли, содержащая подгруппу, изоморфную прямому произведению некоторого числа полных линейных групп  $L_{n_1} \times \dots \times L_{n_k}$ .

Будем рассматривать представления этой группы со следующими свойствами:

а) они целые рациональные, т. е. преобразованные переменные являются заданными полиномами от преобразуемых переменных и параметров группы;

б) преобразования, принадлежащие указанной выше подгруппе, являются линейными, а именно кронекеровскими произведениями представлений компонент этой подгруппы.

При изучении линейных представлений полной линейной группы («классическая теория инвариантов») основную роль играет теорема Грама, утверждающая, что каждая система алгебраических уравнений относительно преобразуемых переменных, имеющая инвариантный смысл (сохраняющаяся при преобразованиях), может быть получена обращением в нуль некоторой системы ковариантов данного представления <sup>(3, 4)</sup>.

Эта теорема непосредственно обобщается на тот случай, когда мы имеем дело с кронекеровским произведением представлений нескольких полных линейных групп.

В общем случае определенных выше представлений система уравнений, имеющая инвариантный смысл, является таковой же и для всякой подгруппы данной группы. Следовательно, на основании теоремы Грама, она может быть образована с помощью тех же операций, которые служат для построения ковариантов в классической теории, а именно с помощью перемножения неприводимых (относительно подгруппы) компонент и разнообразных операций симметрии <sup>(3, 4)</sup>.

Инвариантные системы уравнений имеют решающее значение при исследованиях определенных нами представлений, как показывает следующая теорема, формулируемая и доказываемая вполне аналогично соответствующей теореме из классической теории инвариантов (4).

Два объекта (элемента представления) эквивалентны тогда и только тогда, когда они:

- а) удовлетворяют одним и тем же инвариантным уравнениям;
- б) соответствующие рациональные инварианты для них равны.

3. Изучение инвариантными дифференциально-геометрическими методами  $p$ -мерных многообразий, вложенных в некоторое пространство представления группы Ли и заданных параметрически, основывается, по существу, на следующем факте: такое изучение эквивалентно исследованию многообразия того же числа измерений, вложенного в топологическое произведение исходного пространства и  $p$ -мерного аналитического пространства  $K_p$ , из которых первое преобразуется прежней группой, а второе — группой всех аналитических преобразований  $P_p$ . При этом проекция исследуемого многообразия в пространство  $K_p$  должна иметь эту же размерность  $p$ .

Если  $\theta^a$  — основные инвариантные формы группы  $P_p$ , а  $\omega^i$  — исходного представления, то на многообразии будут выполняться соотношения:

$$\omega^i = A_a^i \theta^a.$$

Дальнейшее исследование идет так, как указано в сообщении (1).

4. Изучение представлений группы  $P_n$  всех аналитических преобразований  $n$ -мерного пространства сводится к изучению представлений конечных групп  $D_{(n, \nu)}$ , преобразующих дифференциалы различных порядков  $\nu$  в фиксированной точке (эти представления — дифференциально-геометрические объекты в смысле В. В. Вагнера (5)). То же с соответствующими изменениями верно для прямых произведений

$$P_{n_1} \times P_{n_2} \times \dots \times P_{n_l}.$$

Выделяемый нами класс представлений этих последних групп соответствует представлениям групп

$$D_{(n_1, \nu_1)} \times D_{(n_2, \nu_2)} \times \dots \times D_{(n_l, \nu_l)},$$

обладающим свойствами, указанными в п. 2. Этот класс замкнут относительно продолжений. В самом деле, для принадлежности представления нашему классу необходимо и достаточно, чтобы его инвариантные формы приводились к виду:

$$dA_\rho + A_\sigma \Omega_\rho^\sigma + \Phi_\rho, \quad \omega^{i_1}, \omega^{i_2}, \dots, \omega^{i_l} \quad (1)$$

$$(\rho, \sigma = 1, \dots, N, \quad i_1 = 1, \dots, n_1, \quad i_2 = 1, \dots, n_2, \dots, i_l = 1, \dots, n_l),$$

где формы  $\omega^{i_\lambda}$  линейно независимы на многообразии  $K_{n_\lambda}$ , формы  $\Omega_\rho^\sigma$  линейно с постоянными коэффициентами зависят от инвариантных форм группы  $D_{(n_1, 1)} \times \dots \times D_{(n_l, 1)}$ , изоморфной  $L_{n_1} \times \dots \times L_{n_l}$ , а  $\Phi_\rho$  линейно зависят от форм, обращающихся на этой подгруппе в нуль, с коэффициентами — полиномами от  $A_\rho$ .

Строя продолжения методами, описанными в п. 3, мы получим формы того же вида (1), причем к нашей группе присоединится новая компонента  $P_p$ .

Можно заметить, что при дифференциально-геометрических исследованиях по существу применяются, кроме операций продолжения (дифференцирования), лишь операции классической теории инвариантов. Изложенные результаты дают законные основания для такого образа действия.

Поступило  
21 XI 1951

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

<sup>1</sup> А. М. Васильев, ДАН, 79, № 1 (1951). <sup>2</sup> Г. Ф. Лаптев, ДАН, 78, № 2 (1951). <sup>3</sup> Г. Вейль, Классические группы, их инварианты и представления, М., 1947. <sup>4</sup> R. Weitzenboeck, Invariantentheorie, Groningen, 1923. <sup>5</sup> В. В. Вагнер, Теория дифференциальных объектов и основания дифференциальной геометрии, приложение к книге О. Веблен и Д. Уайтхед, Основания дифференциальной геометрии, М., 1949.