Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Г. ГЕОРГИЕВ

ФОРМУЛЫ МЕХАНИЧЕСКОЙ КВАДРАТУРЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ЧЛЕНОВ ПРИ МНОГОКРАТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 8 II 1952)

Обозначим через C_n множество всех полиномов $\varphi(x, y)$ действительных переменных x и y, степень которых не превышает натурального числа n. Пусть R есть область плоскости переменных x, y такая, что двойные интегралы

$$I_{kr} = \iint_{(R)} x^k y^r \, dx \, dy \quad (k \geqslant 0,\ r \geqslant 0,\ k + r \leqslant n)$$

существуют.

Различными способами можно найти натуральное число N, N точек (x_i, y_i) на плоскости и N соответствующих чисел λ_i, выбор которых не зависит от полинома $\varphi(x, y)$, таким образом, что формула

$$\iint_{(R)} \varphi(x, y) \, dx \, dy = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi(x_i, y_i) \tag{1}$$

будет верна для всякого полинома $\varphi(x, y)$ множества C_n.

Условимся говорить, что такая формула имеет минимальное число членов, тогда, когда число N правой части самое малое из возможных. В настоящем сообщении мы определяем все формулы этого вида для множеств C_1, C_2, C_3, причем в последнем случае предполагаем, что область R симметрична относительно одной точки.

Получаются следующие результаты:

I. *Существует только одна формула вида*

$$\iint_{(R)} \varphi(x, y) \, dx \, dy = \lambda_1 \varphi(x_1, y_1); \qquad \lambda_1 = I_{00}, \quad x_1 = \frac{I_{10}}{I_{00}}, \quad y_1 = \frac{I_{01}}{I_{00}}, \tag{2}$$

которая верна для каждого полинома $\varphi(x, y)$ множества C_1. Точка (x_1, y_1) есть центр тяжести области R, которую предполагаем гомогенной, λ_1 есть площадь области R.

II. *Число членов в формуле* (1) *по отношению к множеству C_2 равно трем. Существует бесконечное множество формул этого вида, которые зависят от трех произвольных параметров.*

Для того чтобы определить эти формулы, вводим функцию

$$F(\zeta, \xi, \eta; z, x, y) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & z & x & y \\ \zeta & I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ \xi & I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ \eta & I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} I_{00} & I_{10} & I_{01} \\ I_{10} & I_{20} & I_{11} \\ I_{01} & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}.$$

Так как Δ является определителем положительно определенной квадратной формы $I(w, u, v) = \iint\limits_{(R)} (w + ux + vy)^2\,dx\,dy$, то $\Delta > 0$.

Согласно определению функции F будем иметь:

1°. $F(\zeta, \xi, \eta; z, x, y) = F(z, x, y; \zeta, \xi, \eta)$.

2°. $g(z, x, y) = \iint\limits_{(R)} g(1, \xi, \eta)\,F(z, x, y; 1, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = F(z, x, y; w, u, v)$,

где линейная функция $g(z, x, y) = cz + ax + by$ произвольна, $w = \iint g\,dx\,dy$, $u = \iint xg\,dx\,dy$, $v = \iint yg\,dx\,dy$.

3°. $\iint\limits_{(R)} F^2(1, x, y; 1, \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta = F(1, x, y; 1, x, y) > 0$.

При этих условиях устанавливается следующая теорема:

Теорема. *Для того чтобы формула*

$$\iint\limits_{(R)} \varphi(x, y)\,dx\,dy = \lambda_1\varphi(x_1, y_1) + \lambda_2\varphi(x_2, y_2) + \lambda_3\varphi(x_3, y_3) \tag{3}$$

была верна для каждого полинома $\varphi(x, y)$ множества C_2, необходимо и достаточно, чтобы координаты x_i, y_i удовлетворяли трем уравнениям

$$F(1, x_i, y_i; 1, x_k, y_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3;\ i \neq k), \tag{4}$$

т. е. чтобы треугольник с вершинами $M_i(x_i, y_i)$ был полярным относительно мнимой кривой второго порядка $F(1, x, y; 1, x, y) = 0$. Коэффициенты λ_i определяются по формулам

$$\lambda_i = \frac{1}{F(1, x_i, y_i; 1, x_i, y_i)} \tag{5}$$

и, следовательно, всегда положительны.

В самом деле, применяя формулу (3) для трех полиномов $F = F(1, x, y; 1, \xi, \eta)$, xF, yF, получаем

$$\begin{aligned} \lambda_1F_1 + \lambda_2F_2 + \lambda_3F_3 &= 1, \\ \lambda_1F_1x_1 + \lambda_2F_2x_2 + \lambda_3F_3x_3 &= \xi, \\ \lambda_1F_1y_1 + \lambda_2F_2y_2 + \lambda_3F_3y_3 &= \eta, \end{aligned} \tag{6}$$

где $F_i = F(1, x_i, y_i; 1, \xi, \eta)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Из (6) находим

$$\lambda_1F_1 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \xi & x_2 & x_3 \\ \eta & y_2 & y_3 \end{vmatrix}, \quad \lambda_2F_2 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & \xi & x_3 \\ y_1 & \eta & y_3 \end{vmatrix},$$

$$\lambda_3F_3 = \frac{1}{D_0}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \xi \\ y_1 & y_2 & \eta \end{vmatrix}, \quad D_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Подставляя в (7) $\xi = x_i$, $\eta = y_i$ $(i = 1, 2, 3)$, получаем зависимости (4) и (5). Таким образом мы установили, что условие необходимо.

Обратно, пусть x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ — произвольное решение системы (4). В этом случае функции F_i $(i = 1, 2, 3)$ оказываются линейно независимыми и, следовательно, каждый полином $\varphi(\xi, \eta)$ множества C_2 можно представить в виде

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{k \leqslant r} a_{kr} F_k F_r.$$

Из этой формулы находим $a_{kk} F(1, x_k, y_k;\ 1, x_k, y_k) = \lambda_k \varphi(x, y_k)$ и $\iint \varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta = \sum_{k=1}^{3} a_{kk} F(1, x_k, y_k;\ 1, x_k, y_k)$, из которых получается формула (3).

Отметим, что система (4), составленная из трех уравнений с шестью неизвестными, как легко устанавливается, имеет бесконечное множество решений, которые зависят от трех произвольных параметров.

III. Для того чтобы найти формулы вида (1) по отношению к множеству C_3, предположим, что область R симметрична относительно точки (x_0, y_0), о которой можно предположить, что она совпадает с началом координат. Положим

$$f(x, y) = -\frac{1}{\delta} \begin{vmatrix} 0 & x & y \\ x & I_{20} & I_{11} \\ y & I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}, \qquad \delta = \begin{vmatrix} I_{20} & I_{11} \\ I_{11} & I_{02} \end{vmatrix}.$$

Так как δ является определителем положительно определенной квадратной формы $I(u, v) = \iint (ux + vy)^2\, dx\, dy$, то $\delta > 0$. Функция $f(x, y)$ тоже положительна для каждой системы значений x, y переменных, за исключением системы $x = 0$, $y = 0$. При этих условиях доказывается следующая теорема:

Теорема. *Если область R симметрична относительно начала координат, то число N членов в формуле* (1) *для множества C_3 равно четырем. Для того чтобы формула*

$$\iint_{(R)} \varphi(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \varphi(x_i, y_i)$$

была верна для всякого полинома $\varphi(x, y)$ множества C_3, необходимо и достаточно, чтобы четыре точки $M_i(x_i, y_i)$ были вершинами параллелограмма, описанного около эллипса $f(x, y) = 1$. Коэффициенты λ_i определяются по формулам

$$\lambda_i = \frac{1}{2f(x_i, y_i)}$$

и, следовательно, всегда положительны.

IV. Пользуясь аналогичным методом, мы получаем формулы механической квадратуры при тройных интегралах. Так, устанавливаем, что существует только одна формула вида $\iiint_{(R)} \varphi(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \lambda_1 \varphi(x_1, y_1, z_1)$, которая верна для каждого полинома $\varphi(x, y, z)$ множества C_1; точка (x_1, y_1, z_1) есть центр тяжести области R, λ_1 есть объем области R.

Вводя функцию

$$\Phi(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = -\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} 0 & 1 & x & y & z \\ 1 & I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ \xi & I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ \eta & I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ \zeta & I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} I_{000} & I_{100} & I_{010} & I_{001} \\ I_{100} & I_{200} & I_{110} & I_{101} \\ I_{010} & I_{110} & I_{020} & I_{011} \\ I_{001} & I_{101} & I_{011} & I_{002} \end{vmatrix},$$

$$I_{hlm} = \iiint\limits_{(R)} x^k y^l z^m \, dx \, dy \, dz,$$

доказываем следующую теорему:

Теорема. *Для того чтобы формула*

$$\iiint\limits_{(R)} \varphi(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \sum_{i=1}^{4} \lambda_i \varphi(x_i, y_i, z_i)$$

была верна для каждого полинома $\varphi(x, y, z)$ множества C_2, необходимо и достаточно, чтобы координаты x_i, y_i, z_i удовлетворяли уравнениям

$$\Phi(x_i, y_i, z_i; \; x_k, y_k, z_k) = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3, 4; \; i \neq k),$$

т. е. чтобы тетраэдр с вершинами $M_i(x_i, y_i, z_i)$ был полярным относительно мнимой поверхности второго порядка $\Phi(x, y, z; x, y, z) = 0$. Коэффициенты λ_i определяются по формулам

$$\lambda_i = \frac{1}{\Phi(x_i, y_i, z_i; \; x_i, y_i, z_i)}$$

и, следовательно, всегда положительны.

Софийский государственный
политехнический институт
им. И. В. Сталина
София (Болгария)

Поступило
18 VII 1951