Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXIII, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. В. АЗБЕЛЕВ

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА НА ОСНОВЕ МЕТОДА С. А. ЧАПЛЫГИНА

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 2 II 1952)

Предлагаемый в настоящей заметке способ последовательных приближений дает на основе метода С. А. Чаплыгина ([1]) верхние и нижние границы для решения уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{1}$$

сходящиеся к этому решению. Функция f должна быть непрерывной в некоторой области и удовлетворять в этой области условиям

$$\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} \leqslant 0 \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Случай, когда $\partial f / \partial y^{(k)} > 0$, рассмотрен Б. Н. Бабкиным ([2]).

Основанием таких приближений служит следующая

Теорема. *Пусть дано уравнение* (1) *с начальными условиями*

$$y|_{x=x_0} = y_0; \quad y'|_{x=x_0} = y'_0; \ldots; y^{(n-1)}|_{x=x_0} = y_0^{(n-1)} \tag{3}$$

и некоторая функция $z = z(x)$, непрерывная на отрезке $[x_0, X]$ вместе со своими n производными и удовлетворяющая тем же начальным условиям (3) *и неравенству*

$$z^{(n)} > f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) \quad (z^{(n)} < f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})). \tag{4}$$

Пусть, далее, функция $t = t(x)$ определяется равенством

$$t^{(n)} = f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)})$$

и начальными условиями (3).

Если функция f непрерывна в области

$$x_0 \leqslant x \leqslant X, \quad A_k(x) \leqslant y^{(k)} \leqslant B_k(x) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1), \tag{5}$$

где $A_k(x) = \min(z^{(k)}(x), t^{(k)}(x))$ и $B_k(x) = \max(z^{(k)}(x), t^{(k)}(x))$, и в этой области выполнены условия (2), *то функция $t = t(x)$ удовлетворяет в (x_0, X) неравенству $t^{(n)} < f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)})$ $(t^{(n)} > f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)}))$ и в некотором (x_0, x) неравенству $t < y$ $(t > y)$.*

Действительно, в (x_0, X)

$$z^{(n)} - t^{(n)} > f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = 0 \quad (z^{(n)} - t^{(n)} < 0),$$

и, следовательно, в (x_0, X) вообще

$$z^{(k)} - t^{(k)} = \frac{1}{(n-k-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-\rho)^{n-k-1} (z^{(n)} - t^{(n)})\, d\rho > 0 \tag{6}$$

$$(z^{(k)} - t^{(k)} < 0) \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Обозначим через f_k некоторое среднее значение производной $\partial f / \partial y^{(k)}$. На основании (2) и (6) можно написать по формуле Лагранжа, что в (x_0, X)

$$f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)}) - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) = \sum_{k=0}^{k=n-1} (t^{(k)} - z^{(k)}) f_k > 0$$

$$(f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)}) - f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) < 0).$$

Таким образом,

$$t^{(n)} = f(x, z, z', \ldots, z^{(n-1)}) < f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)})$$

$$(t^{(n)} > f(x, t, t', \ldots, t^{(n-1)})).$$

По теореме С. А. Чаплыгина из этого неравенства вытекает и другое $t < y$ $(t > y)$, справедливое в некотором промежутке, примыкающем к точке x_0.

Для уравнения $y'' = -y^2$ Б. Н. Петров ([3]) построил некоторую функцию $w = w(x)$, удовлетворяющую условиям (3), голоморфную вдоль всей оси OX и удовлетворяющую на этой оси неравенству $w'' > -w^2$. Для этой функции неравенство $w > y$ может нарушиться очень близко от точки x_0.

В некоторых случаях такого рода неприменимости теоремы С. А. Чаплыгина можно воспользоваться нашей теоремой. Так, для примера Б. Н. Петрова функция

$$t = \int_{x_0}^{x} (x-\rho)[-w^2]\, d\rho$$

будет нижней границей вдоль всей оси OX.

Образуем теперь последовательность $\{u_i\}$ по закону

$$u_{i+1} = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x-\rho)^{n-1} f(\rho, u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n-1)})\, d\rho +$$

$$+ y_0 + y_0'(x - x_0) + \cdots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}.$$

С помощью доказанной теоремы легко убедиться, что если первый элемент последовательности непрерывен в (x_0, X) вместе со своими n производными, удовлетворяет условиям (3) и в (x_0, X) неравенству $u_1^{(n)} > f(x, u_1, u_1', \ldots, u_1^{(n-1)})$ $(u_1^{(n)} < f(x, u_1, u_1', \ldots, u_1^{(n-1)}))$, то и все элементы последовательности будут в (x_0, X) непрерывны со своими n производными и будут удовлетворять условиям (3). При этом для четных элементов последовательности в (x_0, X) будут выполнены неравенства $u_i^{(n)} < f(x, u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n-1)})$ $(u_i^{(n)} > f(x, u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n-1)}))$, а для нечетных — неравенства $u_i^{(n)} > f(x, u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n-1)})$ $(u_i^{(n)} < < f(x, u_i, u_i', \ldots, u_i^{(n-1)}))$.

При различных дополнительных условиях эта последовательность будет сходиться к решению так, что в том или ином промежутке (x_0, x) для четных индексов будет выполняться неравенство $u_i < y$ $(u_i > y)$, а для нечетных — неравенство $u_i > y$ $(u_i < y)$. Так например, для уравнения 2-го порядка, удовлетворяющего условиям (2), такая сходимость имеет место в пределах применимости теоремы С. А. Чаплыгина. Для уравнения n-го порядка справедливо следующее утверждение.

Если первый элемент последовательности удовлетворяет условиям (3), *в* (x_0, X) *непрерывен со своими* n *производными и там же выполняются неравенства*

$$u_1^{(k)} > y^{(k)} \quad (u_1^{(k)} < y^{(k)}) \quad (k = 0, 1, \ldots, n), \tag{7}$$

то последовательности $\{u_i^{(k)}\}$ *сходятся в* (x_0, X) *к решению* y *и его производным* $y^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$, *причем для четных индексов выполняются неравенства* $u_i^{(k)} < y^{(k)}$ $(u_i^{(k)} > y^{(k)})$, *а для нечетных — неравенства* $u_i^{(k)} > y^{(k)}$ $(u_i^{(k)} < y^{(k)})$.

Вышеприведенные условия для первого элемента, достаточные для сходимости последовательностей, выполняются, например, для функции

$$z = y_0 + y_0'(x - x_0) + \cdots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{M}{n!}(x - x_0)^n$$

$$\left(z = y_0 + y_0'(x - x_0) + \cdots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{m}{n!}(x - x_0)^n\right),$$

где $M \geqslant \max f$, $m \leqslant \min f$, а максимум и минимум берутся относительно всей области (5).

Для уравнений типа $y^{(n)} = f(x, y)$, удовлетворяющих условиям нашей теоремы, последовательности $\{u_i^{(k)}\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ сходятся в пределах применимости теоремы С. А. Чаплыгина и без выполнения неравенств (7). В заключение отметим, что эти пределы для уравнения $y'' = Q(x)y + F(x)$ всегда будут вне промежутка $(x_0, x_0 + A)$, если $A \leqslant \dfrac{\pi}{\sqrt{\max\limits_{x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + A} |Q(x)|}}$.

Московский станкоинструментальный институт
им. И. В. Сталина

Поступило
12 I 1952

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чаплыгин, Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, 1950. [2] Б. Н. Бабкин, ДАН, **59**, 419 (1948). [3] Б. Н. Петров, ДАН, **51**, № 7, 495 (1946).