Доклады Академии Наук СССР
1952. Том LXXXII, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Л. БЕРЛИНКОВ

ГРУППЫ, ОБЛАДАЮЩИЕ КОМПАКТНОЙ СТРУКТУРОЙ ПОДГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 20 XI 1951)

Во всякую полную структуру можно ввести порядковую топологию при помощи так называемого понятия (o)-сходимости ([1]). Это относится, в частности, к структуре всех подгрупп любой группы. В настоящей работе изучается класс групп, у которых структуре всех подгрупп присуще определенное свойство (компактность) по отношению к этой порядковой топологии, и выясняются его связи с некоторыми другими классами групп.

Пусть G — группа. Последовательность A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ ее подгрупп называется сходящейся, если $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, где D_n есть пересечение всех подгрупп A_m, $m \geqslant n$, а S_n — подгруппа, порожденная всеми этими подгруппами. Мы будем говорить, что группа G обладает компактной структурой подгрупп или структурно компактна, если из всякой последовательности ее подгрупп можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Конечные и квази-циклические группы структурно компактны. Всякая подгруппа и всякая фактор-группа структурно компактной группы сами структурно компактны. Изучение сходящихся последовательностей подгрупп бесконечной циклической группы приводит к теореме:

Теорема 1. *Всякая структурно компактная группа является периодической.*

Теорема 2. *Бесконечная локально конечная p-группа, обладающая компактной структурой подгрупп, является квази-циклической.*

Основные леммы, используемые в доказательстве этого утверждения, таковы:

Лемма 1. *Структурно компактная p-группа не имеет бесконечных истинных инвариантных подгрупп с условием минимальности.*

Лемма 2. *В прямом произведении $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \{a_n\}$, где $\{a_n\}$ — циклические группы одного и того же простого порядка, последовательность подгрупп с общим членом*

$$A_n = \{a_2\} \times \{a_3\} \times \ldots \times \{a_{n+1}\} \times \{a_1 a_{n+2}\}$$

не содержит ни одной сходящейся подпоследовательности.

Главный результат работы С. Н. Черникова ([2]). Важный признак структурной компактности группы дается следующей теоремой, доказываемой при помощи диагонального процесса:

Теорема 3. *Периодическая группа G структурно компактна, если для каждого простого числа p в ней найдется нормальный делитель H_p, удовлетворяющий условиям:*

а) *фактор-группа G/H_p структурно компактна;*

б) *H_p содержится в централизаторе множества всех элементов группы G, имеющих порядки, равные степеням числа p;*

в) *H_p не содержит элементов порядков p.*

Из теорем 1 и 2 вытекают некоторые предложения о прямых произведениях.

Следствие 1. Для того чтобы прямое произведение $G = \prod_{\alpha} G_\alpha$ периодических групп G_α было структурно компактной группой, необходимо и достаточно, чтобы для каждого простого числа p множество всех групп G_α, содержащих элементы порядка p, было конечным и порождало в G структурно компактную подгруппу.

Следствие 2. Группа G, разлагающаяся в прямое произведение конечных и квази-циклических групп, тогда и только тогда структурно компактна, когда каждый квази-циклический множитель является силовской p-подгруппой в G и каждое простое число входит делителем в порядки не более конечного числа конечных прямых множителей.

Следствие 3. Локально конечная группа, разлагающаяся в прямое произведение своих силовских p-подгрупп, тогда и только тогда структурно компактна, когда эти силовские p-подгруппы — конечные или квази-циклические.

Бесконечные структурно компактные группы, не разлагающиеся в прямое произведение истинных подгрупп, можно строить следующим образом. Берем такие непересекающиеся множества P, Q простых чисел, которые можно представить в форме $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_n$, $Q = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$, $P_n = P'_n \cup P''_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, где P_n, Q_n — конечные, P''_n, Q_n — непустые и $P_m \cap P_n$, $Q_m \cap Q_n$, $P'_n \cap P''_n$ — пустые множества ($m \neq n$; $m, n = 1, 2, \ldots$), причем для каждого n из

$$p \in P''_{-1n} \cup P_n, \quad q \in Q_n \quad (P''_0 \text{ пусто}) \qquad (*)$$

следует $q \equiv 1 \pmod p$. Множества P, Q указанного рода существуют в силу теоремы Дирихле о бесконечности числа простых чисел в арифметической прогрессии. Для каждой пары простых чисел p, q берем целое число s_{pq}, удовлетворяющее условиям

$$s_{pq}^p \equiv 1 \pmod q, \quad s_{pq} \not\equiv 1 \pmod q,$$

если при некотором n имеют место включения $(*)$, и равное единице в противном случае.

Ставя числам $p \in P$, $q \in Q$ во взаимно-однозначное соответствие элементы a_p, b_q, строим группу с образующими элементами a_p, b_q $(p \in P,\ q \in Q)$ и определяющими соотношениями

$$a_p^p = b_q^q = 1, \quad a_p^{-1} b_q a_p = b_q^{s_{pq}} \quad (p \in P,\ q \in Q),$$

$$a_{p_1} a_{p_2} = a_{p_2} a_{p_1}, \quad b_{q_1} b_{q_2} = b_{q_2} b_{q_1} \quad (p_1 \in P,\ p_2 \in P,\ q_1 \in Q,\ q_2 \in Q).$$

Эта группа обладает требуемыми свойствами.

Теорема 4. *Для того чтобы локально нормальная группа G обладала компактной структурой подгрупп, необходимо и доста-*

точно, чтобы она имела вид $G = F \times H$, где F — прямое произведение квази-циклических групп по различным простым числам (или единица), а H — такая силовская П*-подгруппа группы G, все p-подгруппы которой конечны.*

Необходимость доказывается при помощи теоремы 2 и теоремы Шура о расширениях конечных групп (3). Для доказательства достаточности сперва устанавливаем, пользуясь теоремой 3, что всякая локально нормальная группа, не имеющая бесконечных p-подгрупп, структурно компактна, а затем применяем следствие 1 теоремы 3.

Структурно компактная группа с условием минимальности есть локально нормальная П-группа, где П — конечное множество простых чисел. Поэтому имеем:

Следствие 1. Бесконечная группа с условием минимальности тогда и только тогда структурно компактна, когда она разлагается в прямое произведение конечного (непустого) множества квази-циклических групп по различным простым числам и конечной группы, порядок которой не делится ни на одно из этих простых чисел.

Следствие 2. Бесконечная группа, являющаяся конечным расширением локально разрешимой группы с конечным множеством простых делителей порядков своих элементов, тогда и только тогда структурно компактна, когда она имеет строение, указанное в следствии 1.

Это вытекает из результатов работы С. Н. Черникова (4) и следствия 1.

Применением вышеупомянутой теоремы Шура (3) легко доказать возможность разложения $G = F \times H$, где F и H определяются как в теореме 4 для любой счетной локально конечной группы G, обладающей компактной структурой подгрупп, если дополнительно потребовать, чтобы ни одна бесконечная силовская p-подгруппа группы G не содержалась в бесконечном классе сопряженных подгрупп. Для этого следует воспользоваться теоремой:

Теорема 5. *Всякая отличная от единицы полная инвариантная абелева подгруппа структурно компактной группы G является силовской* П*-подгруппой в G и содержится в центре этой группы.*

Доказательство опирается на теорему 2 и следствие 1 теоремы 4.

Рассмотрим разрешимые структурно компактные группы.

Лемма 3. *Пусть в структурно компактной группе G некоторое множество M нормальных делителей образует прямое произведение. Тогда для каждого элемента a группы G лишь конечное число нормальных делителей множества M может содержать элементы, не перестановочные с a.*

Действительно, если лемма неверна, то существуют элемент $a \in G$, различные нормальные делители $H_n \in M$ и элементы $b_n \in H_n$ такие, что $ab_n \neq b_n a$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда последовательность подгрупп, общий член A_n которой порождается элементом ab_{n+1} и подгруппами $H_1, \ldots, H_n$, не содержит сходящихся подпоследовательностей.

Теорема 6. *Структурно компактная группа G, обладающая разрешимым нормальным делителем H с локально нормальной фактор-группой G/H, локально нормальна. В частности, всякая разрешимая группа, обладающая компактной структурой подгрупп, локально нормальна и потому имеет строение, указанное в теореме 4.*

Вторая часть теоремы доказывается индукцией по длине ряда коммутантов группы, причем, кроме леммы, используется следующий простой признак локальной нормальности: группа A, обладающая локально нормальной фактор-группой A/B и допускающая покрытие некоторой системой своих локально нормальных подгрупп, содержащих нормальный делитель B, сама локально нормальна. Этот же признак позволяет вывести первую часть теоремы из второй.

Автору не удалось обнаружить существование структурно компактных групп, не являющихся локально нормальными (даже при дополнительном предположении локальной конечности). Вообще, эти два класса групп имеют много сходных свойств. Так, наш основной критерий структурной компактности группы, выражаемый теоремой 3, превращается в критерий локальной нормальности, если условие а) этой теоремы заменить требованием, чтобы фактор-группа G/H_p была локально нормальной. Аналогичные соображения можно высказать относительно следствия 1 теоремы 3. Лемма 3 справедлива также для локально нормальных групп. Ввиду того, что локально нормальная группа, обладающая компактной структурой подгрупп, слойно-конечна ([5]), с последними замечаниями связано следующее предложение, вытекающее из теоремы 2:

Теорема 7. *Структурно компактная группа имеет не более конечного числа нормальных делителей каждого данного конечного порядка.*

Свердловский горный институт им. В. В. Вахрушева

Поступило 24 IX 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Б. З. Вулих и А. Г. Пинскер, Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, 1950. [2] С. Н. Черников, ДАН, 68, № 1 (1948). [3] H. Zassenhaus, Lehrbuch der Gruppentheorie, 1, 1937. [4] С. Н. Черников, Матем. сборн., 28 (70) : 1, 119 (1951). [5] С. Н. Черников, там же, 22 (64) : 1, 101 (1948).