

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ГЛАДКИЕ ПОВЕРХНОСТИ ОГРАНИЧЕННОГО ИСКРИВЛЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 4 XII 1951)

1. А. Д. Александровым в заметках ^(1, 2) были развиты основы внутренней геометрии поверхностей, удовлетворяющих весьма общему условию «ограниченности кривизны». В связи с этим перед автором были поставлены следующие задачи: 1) какие достаточные общие внешнегеометрические условия должно наложить на гладкую поверхность, чтобы ее внутренняя метрика удовлетворяла условию «ограниченности кривизны»; 2) какова внешняя геометрия этого класса поверхностей и ее связь с внутренней геометрией.

В этой заметке в плане сформулированных только что задач мы исследуем некоторый класс гладких поверхностей, подчиненных достаточно общим внешнегеометрическим условиям.

2. Для удобства будем считать, что гладкая поверхность F задается уравнением $z = f(x, y)$ в замкнутом квадрате I на плоскости (x, y) , причем функция $f(x, y)$ имеет там непрерывные первые производные. Пусть $P \subset I$ — многоугольник и T_P — триангуляция многоугольника P на треугольники $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ диаметры которых соответственно равны d_1, d_2, \dots, d_k . Триангуляцию T_P назовем C -нормальной, если

$\sum_{i=1}^k d_i^2 \leq CS(P)$, где $S(P)$ — площадь многоугольника P и C — любая

постоянная. Пусть $\varphi_{i,1}, \varphi_{i,2}, \varphi_{i,3}$ — углы между нормальными к касательным плоскостям в точках поверхности F , которые проектируются в вершины треугольника Δ_i . Тогда треугольнику Δ_i ставим в соответствие число $\mu(\Delta_i) = \varphi_{i,1}^2 + \varphi_{i,2}^2 + \varphi_{i,3}^2$ а всей триангуляции T_P — число

$\mu_C(T_P) = \sum_{i=1}^k \mu(\Delta_i)$. Обозначим через $\mu_C(P)$ точную верхнюю границу

чисел $\mu_C(P)$ по всем C -нормальным триангуляциям многоугольника P , а через $\mu(P)$ обозначим предел $\mu(P) = \lim_{C \rightarrow \infty} \frac{1}{C} \mu_C(P)$.

Определим теперь понятие искривления для произвольного борелевского множества на поверхности F . Пусть сначала $G \subset F$ — открытое множество*, G' — его проекция на плоскость (x, y) и P_1, P_2, \dots, P_k — система попарно неперекрывающихся многоугольников, содержащихся в G' . Искривлением множества G назовем число $\mu_0(G) = \sup \sum_{i=1}^k \mu(P_i)$, где точная верхняя граница берется по всем системам

* Мы называем множество $G \subset F$ открытым, если его проекция на плоскость (x, y) есть пересечение открытого плоского множества с квадратом I .

попарно неперекрывающихся многоугольников P_i , содержащихся в G' . Для произвольного множества $M \subset F$ искривление определяем так: $\mu_0(M) = \inf_{G \supset M} \mu_0(G)$. Гладкую поверхность F называем гладкой по-

верхностью ограниченного искривления, если $\mu_0(F) < +\infty$. Для таких поверхностей искривление есть вполне аддитивная функция множества на кольце борелевских множеств. Класс гладких поверхностей ограниченного искривления включает в себя все поверхности Липшица, а потому и все регулярные поверхности. С другой стороны, этот класс содержит в себе не все гладкие выпуклые поверхности, однако можно построить простые примеры гладких поверхностей ограниченного искривления, не представимых разностью выпуклых функций, поэтому результаты исследования этого класса поверхностей не покрываются работой А. Д. Александрова о поверхности ПРВ⁽³⁾.

3. Важную роль в дальнейшем играет следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякой гладкой поверхности ограниченного искривления F можно построить последовательность многогранников F_n , сходящихся к F , так, что: 1) плоскости граней F_n равномерно сходятся к касательным плоскостям поверхности F ; 2) абсолютные кривизны многогранников F_n ограничены в совокупности и как функции множества слабо сходятся к некоторой вполне аддитивной неотрицательной функции множества; 3) внутренние метрики многогранников F_n равномерно сходятся к внутренней метрике поверхности F .*

Способ построения многогранников F_n таков: рассмотрим на поверхности F систему точек, проекции которых являются вершинами квадратов, образованных сеткой прямых, параллельных сторонам квадрата и таких, что соседние параллельные прямые отстоят друг от друга на $1/n$. Каждый из квадратов делим на два прямоугольных треугольника диагональю, проходящей через левый верхний и правый нижний углы квадрата со стороной $1/n$. Пусть δ_i ($i = 1, 2, \dots, 2n^2$) такой треугольник и P_i, Q_i, R_i — точки поверхности F , которые проектируются в вершины треугольника δ_i . Построим плоский треугольник Δ_i с вершинами P_i, Q_i, R_i . Многогранник, гранями которого служат треугольники Δ_i ($i = 1, 2, \dots, 2n^2$), мы и примем за многогранник F_n .

Теорема 1 в соединении с теоремой А. Д. Александрова ((1), теорема 1) позволяет полностью исследовать характер внутренней метрики гладких поверхностей ограниченного искривления. Именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2. *Всякая гладкая поверхность ограниченного искривления в смысле ее внутренней метрики есть многообразие ограниченной кривизны.*

Пусть далее F — регулярная поверхность, $\mu_0(F)$ — ее искривление, $k_1(X)$ и $k_2(X)$ — кривизны главных нормальных сечений в произвольной точке X поверхности F ; тогда имеет место неравенство:

$$\frac{\mu_0(F)}{8\sqrt{1+2M^2}} \leq \iint_F [k_1^2(X) + k_2^2(X)] dS \leq 8\sqrt{1+2M^2} \mu_0(F) \quad (1)$$

$$\left(M = \max \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \right\} \right),$$

где dS — элемент площади поверхности. Оценка (1) позволяет доказать следующую теорему.

Теорема 3. *Для того чтобы гладкая поверхность F имела ограниченное искривление, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность регулярных поверхностей F_n , равно-*

мерно сходящаяся к F вместе с первыми производными и такая, что последовательность интегралов $\int [k_{n,1}^2(X) + k_{n,2}^2(X)] dS$ равномерно ограничена.

4. При обобщении теоремы Гаусса на гладкие поверхности ограниченного искривления должны быть соответствующим образом обобщены понятия внутренней кривизны и площади сферического изображения. Теорема 2 позволяет использовать для этой цели теорию внутренней кривизны, разработанную А. Д. Александровым в (1). Мы воспользуемся еще определением площади сферического изображения, также данным А. Д. Александровым в заметке (3) для односвязной области на гладкой поверхности. Так как не всякая односвязная область имеет определенную площадь сферического изображения, то мы сначала определяем достаточно обширный класс односвязных областей на поверхности, имеющих определенные площади сферического изображения. Выделение этого класса областей совершается с помощью следующей теоремы.

Теорема 4. Пусть F — гладкая поверхность ограниченного искривления. Тогда, если G — односвязная область, ограниченная кривой, имеющей искривление, равное нулю, то G имеет конечную площадь сферического изображения.

Из этой теоремы следует, что на всякой гладкой поверхности ограниченного искривления для всякой односвязной области G_0 и содержащейся внутри нее замкнутой области G_1 существует содержащаяся в G_0 и содержащая G_1 область G , имеющая определенную площадь сферического изображения.

Обобщение теоремы Гаусса мы доказываем сначала для областей, ограниченных кривыми, гомеоморфными окружности и имеющими нулевое искривление, путем предельного перехода от многогранников. Для многогранников же обобщение теоремы Гаусса доказывается элементарно. Исследование сходимости кривизн и площадей сферических изображений при предельном переходе от многогранников к гладким поверхностям ограниченного искривления осуществляется по-разному. Решение вопроса о сходимости кривизн основано на свойствах слабой сходимости вполне аддитивных функций множества и оценках об искажении углов при замене треугольника, стороны которого являются кратчайшими на поверхности, плоским треугольником со сторонами той же длины. Сходимость площадей сферических изображений следует из теоремы.

Теорема 5. Указанная в теореме 1 последовательность многогранников F_n обладает следующим свойством. Пусть $\sigma(G)$ и $\sigma(G_n)$ — площади сферических изображений областей $G \subset F$ и $G_n \subset F_n$, имеющих общую проекцию на плоскость (x, y) , причем искривление кривой L границы области G равно нулю. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют такие N и δ , что $\mu_0(U_\delta(L)) < \varepsilon$ и при $n > N$ имеет место $|\sigma(G) - \sigma(G_n)| < c\mu_0(U_\delta(L)) + \varepsilon$, где $c < +\infty$ зависит лишь от максимума модуля первых производных функции $f(x, y)$, а $U_\delta(L)$ — δ -окрестность кривой L на поверхности F .

Изложенное выше в соединении с полной аддитивностью кривизны как функции множества позволяет определить площадь сферического изображения любой области G как предел сферических изображений расширяющейся последовательности областей, содержащихся в G , дающих в сумме всю G и имеющих определенные площади сферического изображения. В результате может быть доказана следующая теорема.

Теорема 6 (обобщение теоремы Гаусса). Для всякой области на гладкой поверхности ограниченного искривления площадь сферического изображения этой области равна ее кривизне.

5. Внутренняя метрика поверхности называется метрикой положительной (отрицательной) кривизны, если сумма углов всякого треугольника на поверхности не меньше (не больше) π . Обобщение теоремы Гаусса позволяет установить некоторые внешнегеометрические критерии положительности и отрицательности кривизны гладкой поверхности ограниченного искривления в зависимости от характера сферического изображения. Именно, имеет место теорема:

Теорема 7. Пусть гладкая поверхность F ограниченного искривления посредством нормалей к касательным плоскостям отображается взаимно-однозначно в сферу. Если при этом ориентации обходов любого простого замкнутого контура и его образа на сфере совпадают (противоположны), то внутренняя метрика поверхности F имеет положительную (отрицательную) кривизну.

Относительно гладких поверхностей ограниченного искривления с однозначным сферическим изображением можно доказать также следующие теоремы.

Теорема 8. Пусть гладкая поверхность F ограниченного искривления посредством нормалей взаимно-однозначно отображается в сферу; тогда поверхность F имеет почти везде (в смысле площади) второй дифференциал.

Теорема 9. Пусть гладкая поверхность F задана уравнением $z = f(x, y)$ на всей плоскости (x, y) . Тогда, если 1) каждая ограниченная область на поверхности F имеет ограниченное искривление; 2) у каждой точки поверхности F существует окрестность, которая посредством нормалей взаимно-однозначно отображается в полусферу радиуса 1 с центром в начале координат, лежащую в полупространстве $z > 0$, так, что ориентации любого простого замкнутого контура и его образа на полусфере противоположны, то для любой плоскости P открытые множества точек P^ , лежащих над F и под F , не имеют связных ограниченных компонент.*

Теорема 9 характеризует поведение в целом поверхности с внутренней метрикой отрицательной кривизны. Рассматриваемое свойство поверхности отрицательной кривизны в случае, когда поверхность регулярна, использовал С. Н. Бернштейн для доказательства единственности решения задачи Дирихле для уравнений в частных производных эллиптического типа. Впоследствии эта теорема С. Н. Бернштейна была обобщена Г. М. Адельсоном-Вельским на нерегулярные поверхности.

Поступило
21 XI 1951

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Д. Александров, ДАН, 60, № 9 (1948). ² А. Д. Александров, ДАН, 63, № 4 (1948). ³ А. Д. Александров, ДАН, 72, № 4 (1950).