

Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Гомельский государственный технический университет  
имени П. О. Сухого»

Кафедра «Высшая математика»

А. А. Бабич, Л. Д. Корсун

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

*Допущено Министерством образования Республики Беларусь  
в качестве учебного пособия для студентов учреждений  
высшего образования по специальностям «Информатика  
и технологии программирования», «Системы управления  
информацией», «Электронные системы и технологии»*

Гомель 2025

УДК 512.6(075.8)

ББК 22.14я73

Б12

Рецензенты: зав. кафедрой фундаментальной и прикладной математики Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. Н. Марченко*;  
доц. кафедры информационно-вычислительных систем Белорусского торгово-экономического университета потребительской кооперации канд. физ.-мат. наук, доц. *Л. А. Воробей*

**Бабич, А. А.**

Б12 Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учеб. пособие / А. А. Бабич, Л. Д. Корсун ; М-во образования Респ. Беларусь, Гомел. гос. техн. ун-т им. П. О. Сухого. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2025. – 202 с.

ISBN 978-985-535-568-8.

Содержит краткий курс лекций по дисциплине «Математика. Геометрия и алгебра» с методическими рекомендациями и примерами. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Для студентов технических специальностей дневной формы обучения.

УДК 512.6(075.8)

ББК 22.14я73

ISBN 978-985-535-568-8

© Бабич А. А., Корсун Л. Д., 2025

© Учреждение образования «Гомельский государственный технический университет имени П. О. Сухого», 2025

## Оглавление

Предисловие.....	5
Глава 1. Матричная алгебра.....	6
1.1. Матрицы.....	6
1.2. Линейные операции над матрицами.....	8
1.3. Умножение матриц.....	10
1.4. Транспонирование матриц.....	13
1.5. Перестановки и подстановки.....	16
1.6. Определитель матрицы.....	21
1.7. Обратная матрица.....	27
1.8. Ранг матриц.....	30
Задания к главе 1.....	34
Глава 2. Линейные системы.....	40
2.1. Системы линейных уравнений.....	40
2.2. невырожденные системы.....	42
2.3. Метод Гаусса–Жордана.....	44
Задания к главе 2.....	50
Глава 3. Векторная алгебра.....	52
3.1. Векторы.....	52
3.2. Линейные операции над векторами.....	55
3.3. Размерность и базис пространств векторов.....	60
3.4. Декартов базис и декартовы координаты векторов.....	63
3.5. Скалярное произведение векторов.....	67
3.6. Векторное произведение векторов.....	71
3.7. Смешанное произведение векторов.....	74
Задания к главе 3.....	78
Глава 4. Аналитическая геометрия.....	80
4.1. Декартовы координаты точек в пространстве.....	80
4.2. Прямая на плоскости.....	85
4.3. Плоскость в пространстве.....	93
4.4. Прямая и плоскость в пространстве.....	100
4.5. Классификация кривых и поверхностей.....	111
4.6. невырожденные кривые второго порядка.....	115
4.7. невырожденные поверхности второго порядка.....	123
Задания к главе 4.....	129
Глава 5. Линейные пространства и операторы.....	135
5.1. Линейные пространства.....	135
5.2. Размерность и базис линейных пространств.....	138

5.3. Переход к другому базису.....	145
5.4. Линейные подпространства и операции над ними.....	148
5.5. Линейные операторы .....	154
5.6. Собственные векторы и собственные значения.....	164
Задания к главе 5 .....	172
Глава 6. Линейные операторы в евклидовых пространствах.....	175
6.1. Евклидовы пространства .....	175
6.2. Сопряженные линейные операторы .....	183
6.3. Самосопряженные линейные операторы .....	184
6.4. Квадратичные формы.....	186
Задания к главе 6 .....	194
Ответы к заданиям.....	196
Литература .....	202

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное учебное пособие в основе своей представляет курс лекций по разделам «Аналитическая геометрия» и «Линейная алгебра», входящим как в общий курс «Математика», так и в специальные курсы «Математика. Геометрия и алгебра», «Аналитическая геометрия и линейная алгебра», «Линейная алгебра и аналитическая геометрия» для студентов инженерно-технических специальностей Гомельского государственного технического университета имени П. О. Сухого.

Содержание пособия охватывает все темы и разделы, включаемые в образовательные стандарты и учебные планы для специальностей инженерного-технического профиля, в том числе и информационной направленности, таких как «Информатика и технологии программирования», «Системы управления информацией», «Электронные системы и технологии». Представленный материал разбит на лекции. В конце каждого раздела помещен набор задач, целью решения которых является приобретение студентами практических навыков, умений применять основные методы и алгоритмы линейной алгебры и аналитической геометрии на практике (в многочисленных приложениях). Решения большинства задач снабжены ответами.

Спецификой чтения лекций по математическим дисциплинам в технических вузах является необходимость постоянного указания на их прикладную направленность и специальные приложения. По этой причине и в силу ограниченности лекционного времени в учебном пособии отсутствует строгое доказательство теорем, а даны в некоторых случаях лишь указания к доказательствам. При этом был сделан упор на раскрытие содержания теорем, приведено достаточное количество примеров, указывающих на область применимости того или иного общего результата, и дан подробный разбор типовых задач.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам – сотрудникам кафедры высшей математики учреждения образования «Военная академия Республики Беларусь», заведующему кафедрой общей математики и информатики механико-математического факультета БГУ, доценту экономических наук, профессору С. А. Самалю, профессору кафедры фундаментальной и прикладной математики Гродненского государственного университета имени Я. Купалы, доктору физико-математических наук, профессору Е. А. Ровбе – за ценные замечания и советы, способствующие улучшению содержания пособия.

## Лекция 1

### Глава 1. Матричная алгебра

#### 1.1. Матрицы

При работе с массивами чисел часто удобно их не просто записывать в строчку, а каким-либо образом группировать. Примером возможной группировки является запись чисел в виде таблиц. Такие таблицы могут рассматриваться как самостоятельные математические объекты. Для того чтобы эти объекты можно было использовать в вычислительных процедурах, необходимо определенным образом ввести операции над ними. В результате мы приходим к новому виду алгебры. Дадим соответствующие определения.

##### Определение 1.1.1

*Матрицей* размером  $m \times n$  называется прямоугольная таблица чисел, состоящая из  $m$  строк и  $n$  столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются ее *элементами*.

Принято матрицы обозначать большими латинскими буквами  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и т. д. При необходимости внизу указываются размеры матрицы. Например,  $A_{3 \times 4}$  – матрица, состоящая из трех строк и четырех столбцов.

Элементы матрицы обозначаются малыми латинскими буквами и снабжаются двумя индексами:  $a_{ij}$ . Первый индекс соответствует номеру строки, а второй – номеру столбца, на пересечении которых и стоит данный элемент.

Для задания явного вида матриц используются либо две вертикальные черты, либо круглые или квадратные скобки:

$$\left\| \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right\|, \quad \left( \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right), \quad \left[ \begin{array}{ccc} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{array} \right].$$

По типу размеров выделяются:

- **матрица-столбец** (матрица, состоящая из одного столбца);
- **матрица-строка** (матрица, состоящая из одной строки);
- **квадратная матрица** (матрица, у которой число строк равно числу столбцов). Это число будем называть **порядком квадратной матрицы**.

Спецификой квадратных матриц является наличие диагональных линий. Причем линия, на которой стоят элементы  $a_{ii}$ , т. е. элементы с равными индексами, называется **главной диагональю** квадратной матрицы. Вторая диагональная линия называется **побочной диагональю**. Квадратные матрицы, у которой отличными от нуля могут быть только элементы, стоящие на главной диагонали, называются **диагональными матрицами**.

### Определение 1.1.2

*Единичной матрицей* называется диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны 1.

Единичные матрицы обозначаются буквами  $E$  или  $I$ .

Важными с точки зрения приложений являются следующие типы матриц со специальной структурой нулевых элементов:

- **нулевые матрицы** – матрицы, у которых *все* элементы равны нулю (обозначаются как  $O$  в общем случае, или как  $O_{m \times n}$  – в случае необходимости указания конкретных размеров);

- **верхние треугольные матрицы** – квадратные матрицы, у которых *все* элементы ниже главной диагонали равны нулю, т. е.  $a_{ij} = 0$  для всех  $i > j$ ;

- **трапециевидные матрицы** – матрицы, у которых равны нулю *все* элементы ниже линии одинаковых индексов для первых  $l$  строк и все элементы для оставшихся  $m - l$  строк.

Отметим, что трапециевидными могут быть и квадратные матрицы.

Для введения операций над матрицами и возможности записи матричных формул и соотношений необходимо, в первую очередь, наделить множество матриц отношением равенства.

### Определение 1.1.3

Матрицы  $A$  и  $B$  равны, если

1) равны их размеры;

2) равны *все* их соответствующие элементы:  $a_{ij} = b_{ij}$ .

## 1.2. Линейные операции над матрицами

Введем операции сложения матриц и умножения их на число.

### Определение 1.2.1

Суммой матриц  $A$  и  $B$  одного размера  $m \times n$  называется матрица  $C = A + B$  того же размера, элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (1.2.1)$$

для всех наборов индексов  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .

### Определение 1.2.2

Произведением матрицы  $A$  размера  $m \times n$  на число  $\lambda$  называется матрица  $B = \lambda A$  того же размера, элементы которой вычисляются по формуле

$$b_{ij} = \lambda a_{ij} \quad (1.2.2)$$

для всех наборов индексов  $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ .

Следует обратить внимание на то, что операции сложения матриц и умножения их на число не меняют размеров матриц. Кроме этого результат умножения матрицы  $A$  на число  $(-1)$ , по существу, представляет собой *противоположную матрицу*  $-A$ , что позволяет ввести операцию вычитания матриц по правилу:

$$A - B = A + (-B) = A + (-1)B. \quad (1.2.3)$$

**Пример 1.2.1.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1.  $A + 3B$ . 2.  $B - 2C$ .

*Решение*

1. Матрицы  $A$  и  $3B$  имеют разные размеры:  $2 \times 2$  и  $2 \times 3$  соответственно. Поэтому операция сложения  $A + 3B$  не определена.

2. Матрицы  $B$  и  $2C$  имеют одинаковый размер:  $2 \times 3$ . Указанные операции определены. Используя определения операций сложения матриц и умножения их на число, последовательно находим:

$$\begin{aligned} B - 2C &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 & 4 & -6 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -8 & 12 \\ -10 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -10 & 13 \\ -7 & 5 & -6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

При выполнении сложных операций, состоящих из комбинации нескольких действий, возникает проблема выбора порядка действий. Понятно, что все допустимые последовательности действий должны приводить к одному и тому же результату. По сути, однозначность достигается путем замены одной комбинации матриц другой равнозначной ей комбинацией. Наиболее важные матричные равенства, имеющие общий характер, выделяются в особую категорию соотношений и наделяются статусом свойств операций.

### Теорема 1.2.1

Операции сложения матриц и умножения их на число обладают следующими общими свойствами:

- |                                             |                                      |
|---------------------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $A + B = B + A$                          | (коммутативность суммы)              |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$              | (ассоциативность суммы)              |
| 3. $A + O = A$                              | (свойство нулевой матрицы)           |
| 4. $A + (-A) = O$                           | (свойство противоположной матрицы)   |
| 5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$         | (ассоциативность умножения на число) |
| 6. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ | (дистрибутивность)                   |
| 7. $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$   | (дистрибутивность)                   |
| 8. $A \cdot 1 = A$                          | (свойство единичного коэффициента)   |

В условии теоремы неявно предполагается выполнение всех указанных действий, поэтому в соотношениях все матрицы имеют один и тот же размер. Доказательство теоремы основано на простой проверке равенств. Согласно формулам (1.2.1) и (1.2.2), рассматриваемые операции над матрицами сводятся к арифметическим действиям сложения и умножения над числами, представляющие собой

либо элементы матриц, либо числовые коэффициенты. Поэтому свойства 1–8, по существу, повторяют известные законы арифметики (коммутативность и ассоциативность сложения чисел, дистрибутивность их сложения и умножения, свойства нуля).

Из свойств 1 и 2 следует, что матрицы можно складывать в любом порядке. В свою очередь, свойства дистрибутивности 6 и 7 указывают на возможность вынесения общего множителя за скобки, причем этим множителем может быть как матрица, так и числовой коэффициент.

В общей алгебре операции, которые не меняют тип математических объектов и обладают свойствами 1–8, называются **линейными**. Таким образом, операции сложения матриц и умножения их на число есть *линейные операции над матрицами*.

### 1.3. Умножение матриц

Рассмотрим операцию умножения матриц. Пусть имеются матрица  $A$  размера  $m \times k$  и матрица  $B$  размера  $k \times n$ .

#### Определение 1.3.1

Произведением матриц  $A_{m \times k}$  и  $B_{k \times n}$  называется матрица  $C = A \cdot B$  размера  $m \times n$ , элементы которой вычисляются по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ik}b_{kj} \quad (1.3.1)$$

для всех наборов индексов  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Из определения следует, что умножать матрицы друг на друга можно только, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы. При этом первые множители берутся из строки матрицы  $A$  с номером  $i$ , а вторые – из столбца матрицы  $B$  с номером  $j$ , т. е. говорят, что «матрицы умножаются – строка на столбец».

**Пример 1.3.1.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B = (4 \quad 2 \quad -1), \quad C = (-5 \quad 2 \quad 3).$$

Найти: 1.  $AB$ . 2.  $BC$ . 3.  $CA$ .

*Решение*

1. Матрица  $A$  имеет размер  $3 \times 1$ , а матрица  $B - 1 \times 3$ . Таким образом, произведение  $AB$  определено, причем результирующая матрица будет иметь размер  $3 \times 3$ . Элементы этой матрицы вычислим по формуле (1.3.1):

$$AB = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} (4 \ 2 \ -1) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 4 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \\ (-3) \cdot 4 & (-3) \cdot 2 & (-3) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 4 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -12 & -6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Матрица  $B$  имеет размер  $1 \times 3$ , матрица  $C$  имеет такой же размер  $- 1 \times 3$ . Так как число столбцов матрицы  $B$  не совпадает с числом строк матрицы  $C$ , то их произведение  $BC$  не определено.

3. Матрица  $C$  имеет размер  $1 \times 3$ , а матрица  $A - 3 \times 1$ . Результатом их произведения будет матрица размера  $1 \times 1$ :

$$CA = (-5 \ 2 \ 3) \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = ((-5) \cdot 2 + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1) = (-13).$$

■

**Пример 1.3.2.** Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти: 1.  $AB$ . 2.  $BA$ .

*Решение*

Используя формулу (1.3.1), последовательно находим:

$$1. \ AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \\ 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) & 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$2. \ BA = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ (-2) \cdot 4 + 1 \cdot 1 & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 9 \\ -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что произведение матриц в общем случае некоммутативно (неперестановочно), т. е.  $AB \neq BA$ . Тем не менее, анализируя размеры матриц, можно сделать вывод, что квадратные матрицы одного порядка все-таки могут коммутировать.

В частности, коммутируют между собой все диагональные матрицы, а единичная матрица  $E$  порядка  $n$  коммутирует со всеми квадратными матрицами того же порядка, и имеют место равенства:

$$AE = EA = A. \quad (1.3.2)$$

В общей алгебре элементы, аналогичные матрице  $E$  в соотношениях типа (1.3.2), называются **единичными**. Таким образом, единичные матрицы  $E$  являются *единичными элементами* в алгебре квадратных матриц.

Перейдем к обсуждению других свойств операции умножения.

### Теорема 1.3.1

Операция умножения матриц обладает следующими общими свойствами:

- |                                                |                                |
|------------------------------------------------|--------------------------------|
| 1. $A(BC) = (AB)C$                             | (ассоциативность произведения) |
| 2. $A(B + C) = AB + AC$                        | (дистрибутивность)             |
| 3. $(A + B)C = AC + BC$                        | (дистрибутивность)             |
| 4. $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ | (однородность)                 |
| 5. $A0 = 0; 0A = 0$                            | (свойство нулевой матрицы)     |

Здесь  $\lambda$  – числовой коэффициент, и неявно предполагается, что все произведения матриц определены. Кроме этого, так как в общем случае матрицы относительно их умножения не коммутируют, то необходимо отдельно рассмотреть свойства для умножения матриц слева и справа.

Доказательство теоремы основано на проверке соотношений с использованием определения операции матричного умножения.

Наличие ассоциативности при умножении матриц как общего свойства позволяет однозначно определить произведение нескольких матриц, а для квадратных матриц ввести понятие степени:

$$A^2 = AA; \quad (1.3.3)$$

$$A^n = AA^{n-1}. \quad (1.3.4)$$

Кроме этого положим  $A^0 = E$ .

Все обычные алгебраические свойства степеней с натуральным показателем сохраняются, в том числе и свойство коммутативности:

$$A^m A^n = A^n A^m. \quad (1.3.5)$$

Поэтому для любой квадратной матрицы  $A$  можно помимо матриц кратных единичной  $\lambda E$  найти и другие коммутирующие с ней матрицы, например,  $A^2$ ,  $A^3$  и т. д.

Важнейшим следствием ассоциативности произведения является возможность введения функций над квадратными матрицами. Простейшей матричной функцией является многочлен:

$$P_n(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + \dots + a_1 A + a_0 E, \quad (1.3.6)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – числовые коэффициенты, а  $E$  – единичная матрица соответствующей размерности.

**Пример 1.3.2.** Пусть многочлен  $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$  рассматривается как функция на множестве квадратных матриц  $M_{2 \times 2}$  второго порядка. Найти значение многочлена для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

*Решение*

Предварительно вычислим:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 4 + 4 \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 2 \cdot (-1) & (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее находим:

$$f(A) = 2A^2 - 3A + E = 2 \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ -5 & 0 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 28 \\ -7 & -5 \end{pmatrix}.$$

■

Свойства дистрибутивности и однородности 2–4 согласовывают корректный (однозначно определенный) порядок совместных действий операций умножения матриц, их сложения и умножения на число. Сама операция умножения матриц, безусловно, линейной не является, так как для нее нарушается целый ряд свойств линейности (теорема 1.2.1).

#### 1.4. Транспонирование матриц

Сложение и умножение матриц относятся к типу бинарных операций (т. е. операций, в которых участвуют не менее двух математических объектов). Матрицы как таблицы чисел позволяют естественным образом ввести важную унарную операцию (т. е. операцию, которая возможно выполняет действие над одним математическим объектом).

### Определение 1.4.1

Транспонированием матриц называется операция, заключающаяся в преобразовании матрицы  $A$  размера  $m \times n$  в матрицу  $A^T$  размера  $n \times m$ , элементы которой определяются как

$$a_{ij}^T = a_{ji} \quad (1.4.1)$$

для всех наборов индексов  $i = \overline{1, m}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

Формально транспонирование меняет порядок индексов у матричных элементов. Но это означает, что строки транспонированной матрицы  $A^T$  совпадают со столбцами исходной матрицы  $A$ , а столбцы – со строками. Поэтому часто говорят о транспонировании матрицы просто как о перестановке ее строк и столбцов местами («была первая строка (первый столбец) – стала первым столбцом (первой строкой)» и т. д.).

**Пример 1.4.1.** Выполнить операцию транспонирования для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = (4 \quad 3 \quad -2), \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

*Решение*

Согласно определению (1.4.1), получаем:

$$A^T = (7 \quad -2 \quad 3), \quad B^T = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 0 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

■

Особенностью транспонирования квадратных матриц является сохранение их порядка. При этом появляется возможность рассмотреть два типа специальных матриц.

### Определение 1.4.2

Матрица  $A$  называется *симметричной*, если

$$A^T = A, \quad (1.4.2)$$

и *антисимметричной*, если

$$A^T = -A. \quad (1.4.3)$$

С учетом (1.4.1) для элементов симметричных матриц имеем:

$$a_{ij} = a_{ji}. \quad (1.4.4)$$

Это означает, что элементы матрицы, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны друг другу. Этим и объясняется название данного типа матриц.

Аналогично для антисимметричных матриц получаем:

$$a_{ij} = -a_{ji}. \quad (1.4.5)$$

Отсюда для диагональных элементов находим:

$$a_{ii} = -a_{ii} \Rightarrow a_{ii} = 0.$$

Таким образом, все диагональные элементы антисимметричных матриц равны нулю.

### Пример 1.4.2

Пример симметричных матриц:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Пример антисимметричных матриц:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

■

Преобразования матричных выражений, составленных с помощью разных операций над матрицами, включая и транспонирование, выполняются по определенным правилам. Правила, согласующие операции между собой, называются **свойствами операций**.

### Теорема 1.4.1

Операция транспонирования матриц обладает следующими общими свойствами:

1.  $(A^T)^T = A$  (закон инволюции)
2.  $(A + B)^T = A^T + B^T$
3.  $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
4.  $(AB)^T = B^T A^T$

Все свойства доказываются непосредственно по определению операций. Особо отметим, что согласно свойству 4, при транспонировании меняется порядок матриц-сомножителей. Это свойство непосредственно обобщается и на произведение любого количества матриц.

## Лекция 2–3

### 1.5. Перестановки и подстановки

В этом параграфе будут изложены вспомогательные сведения, необходимые для введения важных числовых характеристик матриц.

#### Определение 1.5.1

*Перестановкой порядка  $n$*  называется всякий упорядоченный набор (без повторений) первых  $n$  натуральных чисел:

$$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Понятие перестановки является общим комбинаторным понятием и его можно ввести для любого конечного множества. При этом условие «без повторений» на практике (т. е. в приложениях), по существу, означает принципиальную различимость объектов (элементов множества). Различимость позволяет перенумеровать объекты и в дальнейшем работать только с наборами их номеров.

#### Теорема 1.5.1

Число различных перестановок порядка  $n$  вычисляется по формуле

$$P_n = n! \quad (1.5.1)$$

Доказательство теоремы можно провести с помощью метода математической индукции.

#### Определение 1.5.2

Всякое взаимно однозначное отображение  $\pi$  множества первых  $n$  натуральных чисел в себя называется *подстановкой порядка  $n$* .

Подстановку как отображение конечного множества удобно записывать в виде таблицы, состоящей из двух строк. Первая строка соответствует начальному набору чисел, а вторая ее образу:

$$\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

где  $j_k = \pi(i_k)$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

В принципе начальный набор может быть записан в любом порядке. Говорят, что подстановка имеет *канонический вид*, если начальный набор чисел записан в порядке возрастания:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Такая форма записи позволяет однозначно определять подстановку, указывая только второй набор чисел:

$$\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n),$$

тем самым устанавливая взаимно однозначное соответствие (*биекцию*) между множеством подстановок и множеством перестановок одного порядка. Теперь отношение равенства на множестве подстановок можно ввести по аналогии с равенством перестановок.

### Определение 1.5.3

Подстановки  $\pi_1 = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$  и  $\pi_2 = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  равны, если

- 1) равны их порядки:  $m = n$ ;
- 2) равны все их соответствующие образы:  $\alpha_k = \beta_k$ .

В силу биекции число различных подстановок совпадает с числом различных перестановок того же порядка и вычисляется по формуле (1.5.1).

Подстановки как преобразования допускают введения между ними естественной бинарной операции.

### Определение 1.5.4

*Композицией* подстановок  $\pi_1$  и  $\pi_2$  одного порядка  $n$  называется подстановка  $\pi_1 \circ \pi_2$  того же порядка, где

$$\gamma_k = \pi_2(\pi_1(k)), \quad k = \overline{1, n}. \quad (1.5.2)$$

По сути, композиция подстановок – это повторное отображение исходного набора чисел. Поэтому композицию  $\pi_1 \circ \pi_2$  удобно выполнять, записывая подстановки следующим образом:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ k_1 & k_2 & \dots & k_n \end{pmatrix}. \quad (1.5.3)$$

В частности, находим:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \quad (1.5.4)$$

**Пример 1.5.1.** Даны подстановки:  $\pi_1 = (3124)$  и  $\pi_2 = (4312)$ . Найти: а)  $\pi_1 \circ \pi_2$ ; б)  $\pi_2 \circ \pi_1$ .

*Решение*

Используя правило (1.5.3), последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \text{а) } \pi_1 \circ \pi_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv (1432); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \pi_2 \circ \pi_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv \\ & \equiv (4231). \end{aligned}$$

■

Как следует из примера,  $\pi_1 \circ \pi_2 \neq \pi_2 \circ \pi_1$ , поэтому композиция подстановок общим свойством коммутативности не обладает. Тем не менее она ассоциативна, т. е. соотношение

$$\pi_1 \circ (\pi_2 \circ \pi_3) = (\pi_1 \circ \pi_2) \circ \pi_3 \quad (1.5.5)$$

выполняется для любых трех подстановок одного порядка.

*Определение 1.5.5*

Подстановка

$$e = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \equiv (1, 2, \dots, n) \quad (1.5.6)$$

называется *тождественной*.

Для тождественной подстановки справедливы равенства:

$$\pi \circ e = e \circ \pi = \pi. \quad (1.5.7)$$

Поэтому она играет роль единичного элемента в алгебре подстановок.

### Определение 1.5.6

Подстановка  $\pi^{-1}$  называется *обратной* для подстановки  $\pi$ , если

$$\pi \circ \pi^{-1} = \pi^{-1} \circ \pi = e. \quad (1.5.8)$$

И (1.5.4) следует, что для  $\pi = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$  обратной будет подстановка вида  $\pi^{-1} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \dots & j_n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ . В частности,  $e^{-1} = e$ .

Итак, подстановки образуют множество, содержащее единичный элемент с композицией, которая является ассоциативной бинарной операцией, причем каждый элемент множества обратим. Такие множества в общей алгебре называются **группами**. Таким образом, подстановки образуют группу. Она называется *симметрической группой*.

### Определение 1.5.7

Упорядоченная пара натуральных чисел  $(a, b)$  называется *инверсной*, если большее число стоит левее меньшего.

Обозначим через  $S(\pi)$  число всех инверсных пар, содержащихся в подстановке  $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , записанной в каноническом виде. Подсчет удобно вести по формуле

$$S(\pi) = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1}, \quad (1.5.9)$$

где  $S_k$  – число инверсных пар для числа  $k$ .

### Определение 1.5.8

Подстановка  $\pi$  называется *четной*, если число всех ее инверсных пар  $S(\pi)$  четно, и *нечетной*, если  $S(\pi)$  – нечетно. Число

$$\sigma(\pi) = (-1)^{S(\pi)} \quad (1.5.10)$$

называется *четностью* подстановки.

Заметим, что понятие четности не зависит от формы записи подстановок и разбивает множество всех подстановок одного порядка на два класса. Классу четных подстановок приписывается число  $+1$ , а нечетных  $-(-1)$ .

**Пример 1.5.2.** Определить четность подстановки  $\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ .

*Решение*

Запишем подстановку в каноническом виде:

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \equiv (2\ 4\ 5\ 3\ 1).$$

Тогда, используя формулу (1.5.9), находим:

$$S(\pi) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 4 + 0 + 2 + 0 = 6.$$

Таким образом,  $\pi$  – четная подстановка и  $\sigma(\pi) = +1$ .

■

Отметим следующие свойства четности:

$$\sigma(\pi_1 \circ \pi_2) = \sigma(\pi_1)\sigma(\pi_2); \quad (1.5.11)$$

$$\sigma(\pi^{-1}) = \sigma(\pi). \quad (1.5.12)$$

### Определение 1.5.9

*Транспозицией* подстановки называется унарная операция, заключающаяся в перестановке местами любых двух образов:

$$\pi = (\dots \alpha_i \dots \alpha_j \dots) \rightarrow \pi' = (\dots \alpha_j \dots \alpha_i \dots).$$

По существу, транспозиция представляет собой простую унарную операцию над подстановками.

### Теорема 1.5.2

Любая транспозиция меняет четность подстановки.

Для перестановки двух соседних чисел теорема очевидна, так как если пара  $(\alpha_k, \alpha_{k+1})$  была инверсной, то пара  $(\alpha_{k+1}, \alpha_k)$  будет неинверсной, и, наоборот. При этом общее количество инверсных пар, кото-

рые составляют числа  $\alpha_k$  и  $\alpha_{k+1}$  с другими числами перестановки, сохраняется. Доказательство общего результата основано на подсчете числа транспозиций соседних чисел, цепочка которых позволяет восстановить исходный порядок образов.

### 1.6. Определитель матрицы

Пусть задана квадратная матрица  $A = \|a_{ij}\|$  порядка  $n$ .

#### Определение 1.6.1

*Определителем* квадратной матрицы  $A$  называется число  $\Delta$ , вычисляемое по формуле

$$\Delta = \sum_{\pi} (-1)^{\sigma(\pi)} a_{1\alpha_1} a_{2\alpha_2} \dots a_{n\alpha_n}, \quad (1.6.1)$$

где сумма берется по всем возможным перестановкам вторых индексов  $\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ;  $\sigma(\pi)$  – четность соответствующей подстановки.

Для определителей матриц приняты следующие обозначения:

$$\Delta \equiv \det A \equiv |a_{ij}|.$$

Сумма в формуле (1.6.1) содержит  $n!$  слагаемых, которые называются **членами определителя**. Каждый член представляет собой произведение  $n$  сомножителей, которые, в свою очередь, являются элементами матрицы  $A$ , стоящими в разных строках и столбцах.

Выпишем конкретные расчетные формулы для вычисления определителей первых трех порядков.

*Определитель 1-го порядка:*

$$\Delta = |a_{11}| = a_{11}. \quad (1.6.2)$$

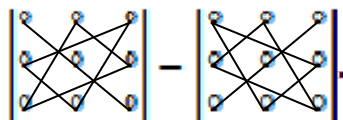
*Определитель 2-го порядка:*

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.6.3)$$

Определитель 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.6.4)$$

Вычисление определителей третьего порядка можно выполнять по правилу треугольника, которое представляет собой расчет согласно графической схеме вида



**Пример 1.6.1.** Вычислить определитель  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ .

*Решение*

Выписывая члены определителя по правилу треугольника, находим:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 = \\ = 3 - 2 + 0 + 0 - 4 - 2 = -5.$$

Ответ:  $-5$ . ■

Заметим, что уже определитель 4-го порядка содержит  $4! = 24$  члена, каждый из которых представляет собой произведение четырех сомножителей. Поэтому расчет определителей порядка выше трех непосредственно по формуле (1.6.1) становится чрезвычайно громоздким. Расчеты можно значительно упростить, если использовать свойства определителей.

**Свойства определителей:**

I. Операция транспонирования не меняет определитель матриц:

$$\det A = \det A^T. \quad (1.6.5)$$

II. При перестановке любых двух строк местами определитель меняет знак.

III. Определитель с двумя одинаковыми строками равен нулю.

IV. Если строка определителя пропорциональна какому-либо числу  $\lambda$ , то это число можно вынести за знак определителя.

V. Определитель с нулевой строкой равен нулю.

VI. Определитель, у которого некоторая строка  $\bar{a}_k$  представляется в виде суммы двух строк  $\bar{a}_k = \bar{b}_k + \bar{c}_k$ , равен сумме определителей со строками  $\bar{b}_k$  и  $\bar{c}_k$  соответственно.

VII. Определитель не изменится, если к его строке добавить любую линейную комбинацию других его строк.

Доказательство свойств I–VII основано на использовании формулы (1.6.1) с учетом свойств подстановок и их четностей. Следует отметить, что, так как при транспонировании матриц строки и столбцы меняются местами, то, согласно свойству I, все утверждения, сформулированные для строк, автоматически переносятся и на столбцы. Определитель есть полилинейная функция элементов матрицы, (линейная по каждому отдельному элементу), но общим свойством линейности не обладает:

$$\det(A + B) \neq \det A + \det B;$$

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad (1.6.6)$$

где  $n$  – порядок матриц  $A$  и  $B$ , а  $\lambda$  – числовой коэффициент.

#### Определение 1.6.2

*Минором  $M_{ij}$  квадратной матрицы  $A$  называется определитель матрицы, полученной из  $A$  путем удаления  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.*

#### Определение 1.6.3

*Алгебраическим дополнением элемента  $a_{ij}$  квадратной матрицы  $A$ , называется число  $A_{ij}$ , вычисляемое по формуле*

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.6.7)$$

### Теорема 1.6.1

Определитель матрицы  $A$  равен сумме произведений элементов матрицы, стоящих в некоторой фиксированной строке (столбце), на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ для } \forall i; \quad (1.6.8)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij} \text{ для } \forall j. \quad (1.6.9)$$

Представление определителя в виде сумм (1.6.8) и (1.6.9) называется **разложением Лапласа**. При этом сумма вида (1.6.8) называется разложением по  $i$ -й строке, а сумма вида (1.6.9) – **разложением по  $j$ -му столбцу**. Значение определителя не зависит от номера строки или столбца. Выбор строки (столбца) производится из соображений наименьшего количества вычислительных действий и их простоты. На практике предпочтение отдается строкам или столбцам с большим количеством нулей. При этом «зануление» элементов определителя можно осуществлять предварительно с помощью свойства VII. В частности, строки (столбцы) можно складывать или вычитать.

Использование разложения Лапласа позволяет свести задачу вычисления определителя порядка  $n$  к задаче вычисления определителей на порядок меньше.

Рассмотрим несколько примеров.

**Пример 1.6.2.** Вычислить определитель, используя свойства определителей:

$$\begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 23 & 24 & 25 \\ 9 & 3 & 18 \end{vmatrix}.$$

*Решение*

Третья строка пропорциональна числу 3. На основании свойства IV вынесем этот множитель за знак определителя:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 12 & 11 & 10 \\ 23 & 24 & 25 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Воспользуемся свойством VII применительно к столбцам определителя, а именно, вычтем из элементов первого и второго столбцов соответствующие элементы третьего столбца:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -2 & -1 & 25 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Далее прибавим ко второй строке первую:

$$\Delta = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 35 \\ -3 & -5 & 6 \end{vmatrix}.$$

Наконец, раскладывая определитель по второй строке, последовательно получаем:

$$\Delta = 3 \cdot 35 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -105 \cdot (-10 + 3) = -105 \cdot (-7) = 735.$$

Ответ: 735. ■

**Пример 1.6.3.** Вычислить определитель треугольной матрицы:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Решение*

В первом столбце все элементы ниже первого равны нулю. Поэтому, выполняя разложение Лапласа по первому столбцу, находим:

$$\Delta_n = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Продолжая разложение по первому столбцу, окончательно получаем:

$$\Delta_n = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}. \quad (1.6.10)$$

■

Из последнего примера следует, что определитель любой треугольной матрицы равен произведению только диагональных элементов, при этом недиагональные элементы не влияют на значение определителя. В частности, для единичной матрицы имеем:

$$\det E = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1. \quad (1.6.11)$$

Приведение определителя к треугольному виду с последующим использованием формулы (1.6.10) является одним из эффективных методов их вычисления.

Еще одним общим приемом является представление квадратных матриц в блочном виде. Тогда вычисление определителей матриц в ряде случаев сводится к вычислению определителей блоков. Так имеют место соотношения:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = \det A \cdot \det D; \quad (1.6.12)$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = \det(A+B) \cdot \det(A-B). \quad (1.6.13)$$

Согласно определению 1.6.1, определитель является числовой характеристикой только квадратных матриц. Однако квадратные матрицы можно получить и из прямоугольных матриц, используя операцию умножения.

Справедлива следующая теорема.

### Теорема 1.6.2

Пусть заданы матрица  $A$  порядка  $m \times n$  и матрица  $B$  порядка  $n \times m$ . Тогда

1)  $\det(AB) = 0$ , если  $m > n$ ;

2)  $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ , если  $m = n$ . (1.6.14)

Соотношение (1.6.14) для случая произведения двух квадратных матриц одного порядка часто называют **законом мультипликативности для определителей**.

## 1.7. Обратная матрица

### Определение 1.7.1

Матрица  $B$  называется *обратной* для матрицы  $A$ , если она удовлетворяет соотношениям:

$$AB = BA = E. \quad (1.7.1)$$

Из левого равенства непосредственно следует, что обратные матрицы могут существовать только для квадратных матриц, так как только квадратные матрицы могут коммутировать. Используя закон мультипликативности для определителей, из (1.7.1) с учетом (1.6.10) находим:

$$\det A \cdot \det B = 1. \quad (1.7.2)$$

Следовательно, определитель обратимой матрицы отличен от нуля.

### Определение 1.7.2

Квадратные матрицы с отличным от нуля определителем называются *невырожденными*.

Таким образом, обратные матрицы существуют только для невырожденных матриц. Их принято обозначать как  $A^{-1}$ .

### Теорема 1.7.1

Для всякой невырожденной матрицы  $A$  существует и притом единственная обратная ей матрица  $A^{-1}$ , которая вычисляется по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}^T = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad (1.7.3)$$

где  $\Delta = \det A$  и  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ .

Доказательство теоремы основано на проверке соотношений:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

**Пример 1.7.1.** Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$  найти обратную ей

матрицу  $A^{-1}$ , если она существует.

*Решение*

В первую очередь, вычислим определитель заданной матрицы:

$$\begin{aligned} \Delta = \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= (-2) \cdot (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 \cdot 4 - (4 \cdot (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \cdot 3) = \\ &= 6 + 8 + 36 - (-16 + 9 - 12) = 50 - (-19) = 69. \end{aligned}$$

Так как  $\Delta = 69 \neq 0$ , то заданная матрица  $A$  является невырожденной и обратная ей матрица существует. Далее вычислим все алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 13; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9; & A_{22} &= \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -22; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10; \\ A_{31} &= \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 6; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 16; & A_{33} &= \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -1. \end{aligned}$$

Наконец, по формуле (1.7.3) находим обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{69} \begin{pmatrix} -9 & -1 & 13 \\ 9 & -22 & 10 \\ 6 & 16 & -1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{69} \begin{pmatrix} -9 & 9 & 6 \\ -1 & -22 & 16 \\ 13 & 10 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{23} & \frac{3}{23} & \frac{2}{23} \\ \frac{1}{69} & -\frac{22}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{13}{69} & \frac{10}{69} & -\frac{1}{69} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку выполнения равенства  $AA^{-1} = E$ :

$$AA^{-1} = \frac{1}{69} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -9 & 9 & 6 \\ -1 & -22 & 16 \\ 13 & 10 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{69} \begin{vmatrix} 69 & 0 & 0 \\ 0 & 69 & 0 \\ 0 & 0 & 69 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E \text{ — верно.}$$

$$\text{Ответ: } A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{3}{69} & \frac{3}{69} & \frac{2}{69} \\ \frac{23}{69} & \frac{23}{69} & \frac{23}{69} \\ \frac{1}{69} & \frac{22}{69} & \frac{16}{69} \\ \frac{13}{69} & \frac{13}{69} & -\frac{1}{69} \end{vmatrix}.$$

Переход от матрицы  $A$  к обратной матрице  $A^{-1}$  можно рассматривать как своего рода унарную операцию обратимости на множестве невырожденных матриц. Эта операция обладает свойствами, которые существенно отличаются от свойств линейных операций, в частности:

$$(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1},$$

в чем нетрудно убедиться простой проверкой определяющего соотношения (1.7.1). Имеют место следующие общие результаты.

### Теорема 1.7.2

Пусть  $A$  и  $B$  – невырожденные матрицы одного порядка. Тогда для обратных матриц справедливы соотношения:

$$1. (\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda} A^{-1} \text{ для } \forall \lambda \neq 0 \quad (1.7.4)$$

$$2. (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (1.7.5)$$

$$3. (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T \quad (1.7.6)$$

## 1.8. Ранг матриц

Введем предварительно общее понятие минора, которое применительно не только к квадратным, но и к прямоугольным матрицам любого порядка  $m \times n$ . Выделим в матрице какие-либо  $p$  строк и  $p$  столбцов. Очевидно, что число  $p$  не должно превышать наименьшего из чисел  $m$  и  $n$ , определяющих порядок матрицы.

### Определение 1.8.1

*Минором порядка  $p$  матрицы  $A$  называется определитель матрицы, элементы которой стоят на пересечении выделенных  $p$  строк и  $p$  столбцов матрицы  $A$ .*

Отметим, что матрица может иметь несколько миноров одного порядка. Так, например, число миноров первого порядка совпадает с числом элементов матрицы. Поэтому для миноров определенного порядка используются следующие обозначения:

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ j_1 & j_2 & \dots & j_p \end{pmatrix},$$

где в первой строке указаны номера выделенных строк, во второй – номера выделенных столбцов исходной матрицы.

**Пример 1.8.1.** Для матрицы  $A = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 & 4 \\ -1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$  найти указанные

миноры.

Миноры второго порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 - 4 = 8; \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 2 = 17.$$

Миноры третьего порядка:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 15 - 8 - 20 - (8 + 6 + 50) = -13 - 64 = -77;$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 + 80 - (4 - 24 + 30) = 85 - 10 = 75.$$

■

### Определение 1.8.2

*Рангом* матрицы  $A$  называется наибольший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, ранг матрицы  $A$  из примера 1.8.1 равен 3, так как она имеет миноры третьего порядка неравные нулю, а миноры четвертого порядка не существуют.

В дальнейшем ранг матрицы будет обозначаться как  $\text{rg } A$ .

Отметим следующие свойства рангов матриц.

I. Ранг равен нулю только для нулевых матриц:

$$\text{rg } A = 0 \Leftrightarrow A = O.$$

II. Транспонирование не меняет ранга матриц:

$$\text{rg } A^T = \text{rg } A. \quad (1.8.1)$$

III. Ранг невырожденной квадратной матрицы равен ее порядку.

IV. Если квадратные матрицы  $A_{m \times m}$  и  $C_{n \times n}$  невырождены, то для любой матрицы  $B$  порядка  $m \times n$  справедливы равенства:

$$\text{rg } AB = \text{rg } B = \text{rg } BC = \text{rg } ABC. \quad (1.8.2)$$

Вычислить ранг матрицы можно непосредственно по определению. При этом вычисления удобно начинать с верхнего левого элемента матрицы, увеличивая систематически порядок миноров на единицу. Такой метод расчета называется **методом окаймляющих миноров**. Для матриц больших размеров этот метод не является рациональным, так как возникает проблема вычисления определителей высоких порядков.

Рассмотрим матрицы, имеющие трапециевидную форму. Для них ранг равен числу ненулевых строк. Действительно, все левые верхние миноры трапециевидной матрицы имеют треугольный вид, а значит, равны произведению элементов  $a_{kk}$ , стоящих на линии одинаковых индексов. Если трапециевидная матрица имеет  $l$  ненулевых строк, то

наибольший порядок ненулевого минора как раз и равен  $l$ , поскольку любой минор более высокого порядка обязательно захватывает нулевую строку и поэтому равен нулю.

Назовем **элементарными** следующие преобразования над матрицами:

- 1) умножение строки (столбца) на любое число отличное от нуля;
- 2) перестановку любых строк (столбцов) местами;
- 3) прибавление к строке (столбцу) любой линейной комбинации других строк (столбцов).

### Определение 1.8.3

Матрицы  $A$  и  $B$  одного размера  $m \times n$  называются *эквивалентными*, если их можно получить друг из друга с помощью элементарных преобразований.

Эквивалентность матриц  $A$  и  $B$  обозначается как  $A \sim B$ .

### Теорема 1.8.1

Элементарные преобразования не меняют ранг матрицы.

Доказательство теоремы основано на свойствах определителей. Данная теорема позволяет сформулировать алгоритм вычисления ранга матрицы, а именно:

- Шаг 1. Используя элементарные преобразования, привести матрицу к трапециевидной форме.
- Шаг 2. Ранг матрицы равен числу ненулевых строк полученной матрицы.

**Пример 1.8.1.** Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 75 & 94 & 53 & 132 \\ 75 & 94 & 54 & 134 \\ 25 & 32 & 20 & 48 \end{pmatrix}.$$

#### Решение

Воспользуемся методом элементарных преобразований и приведем матрицу к трапециевидной форме. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, из третьей строки вычтем вторую, а из четвертой – первую, и получим:

$$A \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Далее из четвертой строки вычтем вторую:

$$A \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

а затем из четвертой – третью:

$$A \sim \begin{pmatrix} 25 & 31 & 17 & 43 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В результате нам удалось привести матрицу  $A$  к трапециевидной форме. При этом число ненулевых строк полученной матрицы равно 3, поэтому и ранг исходной матрицы  $A$  равен 3.

*Ответ:*  $\text{rg} A = 3$ .

■

Тесная связь понятия ранга матрицы с другими важными понятиями линейной алгебры будет раскрыта в следующих разделах курса.

## ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 1

1. Найти элементы  $a_{23}$  и  $a_{41}$  матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

2. Найти элементы  $a_{12}$  и  $a_{24}$  матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

3. Найти  $A+B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

4. Найти  $A-B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -3 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -6 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти  $2A-3B$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. Найти  $3A+2B$ :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

7. Найти  $3A-B^T$ :

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -6 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Найти  $4A-3B^T$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Найти  $3A-2A^T+4E$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

10. Найти  $4A+3A^T-2E$ :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

11. Найти  $A \cdot B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

12. Найти  $A \cdot B$ :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В задачах 13–16 найти  $A \cdot B$  и  $B \cdot A$ .

13.  $A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; B = [2 \quad -6 \quad 7].$

14.  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}; B = [1 \quad 2 \quad 0 \quad 1].$

15.  $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \\ -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$

16.  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$

17. Найти  $A \cdot B \cdot C$ , если  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$

18. Найти  $A \cdot B \cdot C$ , если  $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$

19. Найти  $A^2$ , если  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$

20. Найти значение многочлена  $f(A)$ , если

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, f(x) = 2x^2 - 3x + 4.$

21. Найти значение многочлена  $f(A)$ , если

$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, f(x) = x^3 + 3x - 5.$

22. Проверить равенство  $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

23. Найти  $\begin{bmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix}^3$ .

24. Найти  $A$ , если  $2A^T = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ .

25. Найти  $B$ , если  $(A+B)^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ -2 & 6 & 8 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \\ 5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

Найти  $S(\pi)$  в перестановках.

26.  $\pi = (1, 2, 11, 7, 6, 5, 3, 9, 10, 4, 8)$ .

27.  $\pi = (13, 8, 7, 1, 3, 2, 5, 4, 6, 11, 12, 10, 9)$ .

28.  $\pi = (1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1), 2, 4, 6, 8, \dots, 2n)$ .

29.  $\pi = (2, 4, 6, \dots, 2n, 1, 3, 5, \dots, 2n-1)$ .

30. Даны подстановки  $\pi_1 = (2\ 1\ 4\ 3)$  и  $\pi_2 = (2\ 4\ 3\ 1)$ .

Найти: а)  $\pi_1 \circ \pi_2$ ; б)  $\pi_2 \circ \pi_1$ .

31. Определить четность подстановки  $\pi = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ .

Вычислить определители.

32.  $|5|$ ,  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}$ .    33.  $|6|$ ;  $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ ;  $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ .

34.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ .    35.  $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ .    36.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ .

Вычислить определители, используя свойства.

$$37. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 38. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad 39. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 8 & 17 & 9 \\ 9 & 19 & 7 \end{vmatrix}$$

$$40. \begin{vmatrix} 2789 & 3453 \\ 2790 & 3454 \end{vmatrix} \quad 41. \begin{vmatrix} 181 & 281 \\ 217 & 317 \end{vmatrix}$$

42. Найти минор  $M$  матрицы  $A$ , полученный вычеркиванием 2, 4, 5 столбцов, 3, 4, 6 строк, а также алгебраическое дополнение минора  $M$ :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

43. Найти алгебраические дополнения элементов  $a_{23}$  и  $a_{41}$  матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Вычислить определитель, используя теорему Лапласа.

$$44. \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \quad 45. \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \quad 46. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad 47. \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$48. \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad 49. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad 50. \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Вычислить определитель, используя теорему Лапласа и свойства определителя.

$$51. \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \quad 52. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & -1 & -15 & -18 \\ 2 & 1 & 0 & 7 \\ 3 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} \quad 53. \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 & -3 \\ 9 & 5 & 3 & -7 \\ 13 & 7 & 4 & -14 \\ 25 & 13 & 7 & -21 \end{vmatrix}.$$

Найти ранг и указать один из базисных миноров.

$$54. \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad 55. \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \quad 56. \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad 57. \begin{bmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 3 & -2 & 4 \\ 4 & -6 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$58. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 8 \end{bmatrix} \quad 59. \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

$$60. \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 5 & -4 \end{bmatrix} \quad 61. \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

62. При каких значениях параметра  $\alpha$  ранг матрицы  $A$  равен 2?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & \alpha & 6 \end{bmatrix}.$$

63. При каких значениях параметра  $\alpha$  ранг матрицы  $A$  равен 3?

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 8 & 12 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 8 & 16 & 24 \\ \alpha & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Найти матрицы, обратные данным, если они существуют.

$$64. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}. \quad 65. \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}. \quad 66. \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}. \quad 67. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$68. \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 1 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}. \quad 69. \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}. \quad 70. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$71. \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}. \quad 72. \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решить матричные уравнения.

$$73. X \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}. \quad 74. \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

$$75. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 9 & 10 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}. \quad 76. X \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$77. AX + B = C; \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}; \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$78. XA - 2B = C; \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$



Тогда линейную систему (2.1.1), используя операцию умножения матриц, можно записать в форме матричного уравнения:

$$AX = B. \quad (2.1.2)$$

### Определение 2.1.2

Линейная система, у которой все свободные члены  $b_i$  равны нулю, называется *однородной*, в противном случае – *неоднородной*.

Согласно определению однородная линейная система в матричной форме имеет вид:

$$AX = O. \quad (2.1.3)$$

### Определение 2.1.3

*Решением* системы (2.1.1) называется всякий упорядоченный набор чисел  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ , после подстановки, которых вместо неизвестных  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , каждое уравнение системы превращается в верное числовое равенство. При этом линейные системы, имеющие хотя бы одно решение, называются *совместными*, а не имеющие решения – *несовместными*.

Понятно, что однородные системы всегда совместны, так как имеют, по крайней мере, нулевое (тривиальное) решение. Решить систему – это значит найти все ее решения или доказать, что система несовместна. В принципе вопрос совместности линейной системы может быть решен до определения решения системы в явном виде. Введем так называемую расширенную матрицу системы  $\tilde{A}$  порядка  $m \times (n+1)$ , добавляя к матрице коэффициентов  $A$  справа столбец свободных членов  $B$ :

$$\tilde{A} = \|A:B\|.$$

Здесь вертикальная пунктирная черта указывает на блочную структуру матрицы  $\tilde{A}$ . При обратном переходе (от расширенной матрицы к линейной системе) ей соответствует знак «=».

### Теорема 2.1.1 (теорема Кронекера–Капелли)

Линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы коэффициентов  $A$  равен рангу ее расширенной матрицы  $\tilde{A}$ :

$$\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A}. \quad (2.1.4)$$

Следует отметить, что на практике задача определения рангов матриц системы решается непосредственно в процессе решения самой системы.

Процесс решения систем уравнения, как правило, связан с их упрощением и приведением к некоторому стандартному виду. Но не любые преобразования систем уравнений допустимы.

#### Определение 2.1.4

Линейные системы называются *равносильными*, если множества их решений совпадают.

При преобразованиях систем допустимыми являются только равносильные преобразования.

## 2.2. Невырожденные системы

В приложениях часто встречаются так называемые квадратные линейные системы, у которых число уравнений совпадает с числом неизвестных. В матричной форме они имеют вид:

$$AX = B, \quad (2.2.1)$$

но здесь матрица коэффициентов  $A$  есть некоторая квадратная матрица.

#### Определение 2.2.1

Квадратная линейная система (2.2.1) называется *невырожденной*, если ее матрица коэффициентов  $A$  невырождена ( $\det A \neq 0$ ), и *вырожденной*, если матрица  $A$  вырождена ( $\det A = 0$ ).

В первую очередь, рассмотрим невырожденные системы.

#### Теорема 2.2.1

Всякая невырожденная линейная система (2.2.1) имеет единственное решение, которое может быть найдено по формуле

$$X = A^{-1}B. \quad (2.2.2)$$

Действительно, всякая невырожденная матрица имеет единственную обратную матрицу. Тогда, умножая матричное уравнение (2.2.1) слева на обратную матрицу  $A^{-1}$ , получаем:

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Метод решения невырожденных систем с использованием формулы (2.2.2) называется **матричным методом**.

Из теоремы следует, что невырожденная однородная система  $AX = 0$  имеет только одно нулевое решение, которое принято называть тривиальным. Но в приложениях в случае однородных систем интерес представляют как раз нетривиальные решения.

### Теорема 2.2.2

Квадратная однородная система  $AX = 0$  имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда она вырождена, т. е. когда определитель ее матрицы коэффициентов равен нулю:

$$\det A = 0. \quad (2.2.3)$$

Решение невырожденных систем матричным способом по формуле (2.2.2) довольно трудоемко, так как связано с вычислением обратных матриц. Имеется более простой алгоритм решения невырожденных систем.

### Теорема 2.2.3

Решение невырожденной системы (2.2.1) может быть найдено по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \quad (2.2.4)$$

где  $\Delta = \det A$ , а  $\Delta_k$  – определитель матрицы, полученной из матрицы  $A$  путем замены  $k$ -го столбца столбцом свободных членов  $B$ .

Решение линейных систем по формулам (2.2.4) принято называть *правилом Крамера*. Формулы Крамера (2.2.4) являются следствиями формулы (2.2.2). Они выводятся путем подстановки в формулу (2.2.2) явного выражения для обратной матрицы (1.7.3) с учетом разложения Лапласа и свойств определителей.

**Пример 2.1.1.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 10, \\ 6x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 5. \end{cases}$$

### Решение

1. Сначала вычислим определитель матрицы коэффициентов:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 127 + 60 - 14 - 36 + 15 - 42 = 10 \neq 0.$$

Так как  $\Delta \neq 0$ , то система невырождена и имеет единственное решение.

2. Далее, заменяя столбцы определителя  $\Delta$  столбцом свободных членов  $B$ , последовательно находим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 10 & -3 & 2 \\ 5 & 7 & -3 \end{vmatrix} = 20;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 1 & 10 & 2 \\ 6 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 20;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 10 \\ 6 & 7 & 5 \end{vmatrix} = 70.$$

Наконец, решение системы получаем по формулам Крамера (2.2.4):

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{70}{10} = 7.$$

Ответ: (2, 2, 7). ■

### 2.3. Метод Гаусса–Жордана

Рассмотрим линейные системы общего вида (2.1.2). Универсальным методом решения произвольной линейной системы является метод Гаусса. В основе метода лежит идея последовательного исключения неизвестных. Сам метод представляет собой своего рода алгоритм приведения системы к виду, удобному для реализации этой

идеи. При этом преобразования значительно упрощаются, если их проводить над расширенной матрицей системы, а не над уравнениями. Опишем алгоритм Гаусса:

- Шаг 1. Выписать расширенную матрицу системы  $\tilde{A} = \|A : B\|$ .

Ранее в параграфе 8 главы 1 были введены элементарные преобразования над матрицами. Следует отметить, что элементарные преобразования, выполняемые над строками расширенной матрицы системы, не могут изменить множество решений системы, так как они связаны с простой перестановкой уравнений, умножением уравнений на числа, отличные от нуля, а также со сложением уравнений или их вычитанием.

- Шаг 2. С помощью элементарных преобразований над строками расширенной матрицы  $\tilde{A}$  добиться того, чтобы все элементы, стоящие ниже линии  $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{mm})$ , обратились в ноль. При этом расширенная матрица может быть приведена к одному из следующих трех видов:

– ступенчатый:  $\tilde{A} \sim$  
$$\left\| \begin{array}{cccccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1l} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \vdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2l} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \vdots & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{ll} & \dots & \tilde{a}_{ln} & \vdots & \tilde{b}_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots & \tilde{b}_{l+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots & \tilde{b}_m \end{array} \right\| ;$$

– трапецевидный:  $\tilde{A} \sim$  
$$\left\| \begin{array}{cccccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1l} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \vdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2l} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \vdots & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{ll} & \dots & \tilde{a}_{ln} & \vdots & \tilde{b}_l \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \vdots & 0 \end{array} \right\| ;$$

$$- \text{треугольный: } \tilde{A} \sim \left\| \begin{array}{cccccc} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \vdots & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \vdots & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} & \vdots & \tilde{b}_n \end{array} \right\|.$$

В случае ступенчатого вида система несовместна и не имеет решений, так как среди последних строк обязательно найдется строка, соответствующая неверному числовому равенству:  $0 = b_k$ , в то время как  $b_k \neq 0$ .

Отметим также, что ранг блока  $A$  равен  $l$ , а ранг расширенной матрицы  $\tilde{A}$  больше  $l$  (ранги определяются по числу ненулевых строк), следовательно, ранги не равны:

$$\text{rg } A \neq \text{rg } \tilde{A}.$$

К треугольному виду матрицу  $\tilde{A}$  можно привести только, если система квадратная. В этом случае ранги матриц  $A$  и  $\tilde{A}$  совпадают и равны порядку системы:

$$\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A} = n.$$

Более того, система невырождена. Действительно, блок  $A$ , соответствующий матрице коэффициентов, имеет треугольный вид, а значит, его определитель равен произведению диагональных элементов, среди которых нет нулевых. Таким образом,  $\det A \neq 0$ , система совместна и имеет единственное решение.

Наконец, в случае трапециевидной формы ранги матриц  $A$  и  $\tilde{A}$  также совпадают:

$$\text{rg } A = \text{rg } \tilde{A} = l,$$

но теперь  $l$  меньше числа неизвестных. Как будет показано ниже, система будет совместной, а число решений бесконечно.

По-существу, приведенные рассуждения и составляют содержание доказательства теоремы Кронекера–Капелли. Кроме этого мы провели и классификацию возможных решений, а именно: *всякая линейная система либо не имеет решений, либо имеет одно решение, либо имеет бесчисленное множество решений.*



возвращения к линейной системе отпадает необходимость в выполнении обратного хода Гаусса. Такой вариант решения линейных систем часто называют **методом Гаусса–Жордана**.

**Пример 2.3.1.** Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 4z = 2, \\ 2x + y - 5z = -1. \end{cases}$$

*Решение*

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\|.$$

Далее, используя элементарные преобразования над строками матрицы, занулим все элементы, стоящие ниже линии одинаковых индексов (преобразования в символьном виде указаны в скобках, жирным шрифтом отмечены строки):

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left\| \begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\| \sim \left( \begin{array}{l} \mathbf{1' = 1 - 2 \cdot 2} \\ \mathbf{2' = 2} \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & -1 \end{array} \right\| \sim \left( \begin{array}{l} \mathbf{1' = 1} \\ \mathbf{2' = 2 - 2 \cdot 1} \end{array} \right) \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 0 & 11 & -33 & -9 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Матрица  $\tilde{A}$  приведена к трапецевидной форме. Ранги матриц  $A$  и  $\tilde{A}$  равны 2, следовательно, система совместна и имеет бесчисленное множество решений.

В качестве базисного минора выберем крайний левый, при этом  $x$  и  $y$  будут базисными переменными, а  $z$  – свободной. Продолжим преобразования согласно методу Гаусса–Жордана и приведем базисный минор к виду единичного блока:

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 0 & 11 & -33 & -9 \end{array} \right\| \sim \left( \begin{array}{l} \mathbf{1' = 1} \\ \mathbf{2' = 2 \cdot \frac{1}{11}} \end{array} \right) \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 14 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -9/11 \end{array} \right\| \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{l} \mathbf{1' = 1 + 5 \cdot 2} \\ \mathbf{2' = 2} \end{array} \right) \sim \left\| \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & -1/11 \\ 0 & 1 & -3 & -9/11 \end{array} \right\|. \end{aligned}$$

Далее запишем линейную систему, соответствующую полученной матрице:

$$\begin{cases} x - z = -\frac{1}{11}, \\ y - 3z = -\frac{9}{11}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z - \frac{1}{11}, \\ y = 3z - \frac{9}{11}. \end{cases}$$

Введем вместо  $z$  параметр  $t$ , положив  $z = t$ . Тогда решение системы можно записать как

$$x = t - \frac{1}{11}, \quad y = 3t - \frac{9}{11}, \quad z = t, \quad \text{где } t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Ответ: } \left( t - \frac{1}{11}, 3t - \frac{9}{11}, t \right), \text{ где } t \in \mathbb{R}.$$

■

## ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 2

Записать в матричной форме каждую из указанных систем линейных уравнений.

$$79. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 7x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$80. \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 2, \\ 4x_1 - 2x_2 - 7x_3 = 5. \end{cases}$$

Перейти от матричной записи системы линейных уравнений к обычной.

$$81. \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$82. \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Решить системы матричным способом.

$$83. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 = -1. \end{cases}$$

$$84. \begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ 2x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

$$85. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -5. \end{cases}$$

$$86. \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$87. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

$$88. \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1, \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

Решить системы по формулам Крамера.

$$89. \begin{cases} 3x_1 + x_2 = 4, \\ 4x_1 - 2x_2 = 2. \end{cases}$$

$$90. \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 = 5. \end{cases}$$

$$91. \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -7, \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$92. \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 4x_1 + 9x_2 + x_3 = 17, \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 = 16. \end{cases}$$

$$93. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_2 + 4x_3 + 6 = 0, \\ x_1 + x_3 = 1. \end{cases}$$

$$94. \begin{cases} 3x_3 + x_2 + 6 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Исследовать системы на совместность и найти их общее решение.

$$95. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$$

$$96. \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 5 = 0. \end{cases}$$

$$97. \begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases}$$

$$98. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

$$99. \begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 = 12, \\ 7x_1 - 5x_2 = 23. \end{cases}$$

$$100. \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - x_3 = 7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 - 5x_3 = 2. \end{cases}$$

$$101. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 9, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$102. \begin{cases} 5x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 11, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 = 1. \end{cases}$$

$$103. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$104. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

$$105. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 2, \\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 4, \\ 7x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 5x_4 = 7. \end{cases}$$

$$106. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 6, \\ 6x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 = 1. \end{cases}$$

Найти общее решение систем однородных линейных уравнений.

$$107. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 8x_1 - 4x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$108. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$109. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 7x_3 + 5x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 0. \end{cases}$$

$$110. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

## Лекция 5-6

### Глава 3. Векторная алгебра

#### 3.1. Векторы

##### Определение 3.1.1

Геометрическим вектором (вектором) называется направленный отрезок.

На рис. 3.1 представлены геометрические векторы.

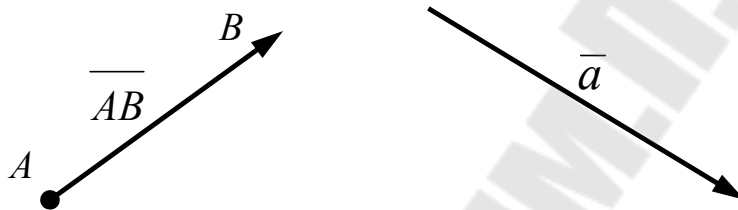


Рис. 3.1. Геометрические векторы

Приняты и допустимы следующие обозначения векторов:

- в физической и технической литературе с использованием стрелки  $\overrightarrow{AB}$  или  $\vec{a}$ ;
- в математической литературе с использованием простой черты сверху  $\overline{AB}$  или  $\overline{a}$ .

При двойном буквенном обозначении первая буква соответствует началу, а вторая – концу вектора.

В данном пособии мы будем придерживаться математического стандарта при обозначении векторов, что позволит не менять обозначений при обобщении понятия вектора на произвольные линейные пространства без привязки к геометрии.

##### Определение 3.1.2

Модулем геометрического вектора называется его длина.

Модуль вектора будем обозначать как  $|\overline{AB}|$  или  $|\overline{a}|$ .

##### Определение 3.1.3

Нулевым вектором называется вектор, у которого начало и конец совпадают.

Для нулевого вектора понятие направления не определено. Модуль нулевого вектора равен 0. Согласно определению  $\overline{AA}$  есть нулевой вектор. Стандартное обозначение:  $\vec{0}$  или просто 0, если из контекста ясно, что речь идет о нулевом векторе.

#### Определение 3.1.4

Единичным вектором или ортом называется вектор, модуль которого равен 1.

Поскольку длина единичных векторов фиксирована, то именно с их помощью удобно задавать направления. Стандартное обозначение единичного вектора:  $\vec{e}$ . Однако в важных случаях орты имеют и специальное обозначение.

Рассмотрим системы векторов.

#### Определение 3.1.5

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или параллельных прямых.



Рис. 3.2. Коллинеарные векторы

Отношение коллинеарности для геометрических векторов эквивалентно отношению *быть параллельным* для прямых и отрезков. При этом, коллинеарные векторы, имеющие одно направление, называются **сонаправленными**, а разное – **противоположнонаправленными**.

Коллинеарность указывается с помощью символа параллельности –  $\parallel$ , а сонаправленность и противоположно направленность векторов с помощью стрелок –  $\uparrow\uparrow$  и  $\uparrow\downarrow$  соответственно. В частности, на рис. 3.2 показано:  $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$  и  $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{d}$ .

#### Определение 3.1.6

Векторы называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Отношение компланарности вводится для систем, состоящих из трех и более векторов. Говорить о компланарности двух векторов нет смысла, так как в евклидовой геометрии любые две прямые всегда лежат или в одной плоскости, или в случае скрещивания в двух параллельных плоскостях.

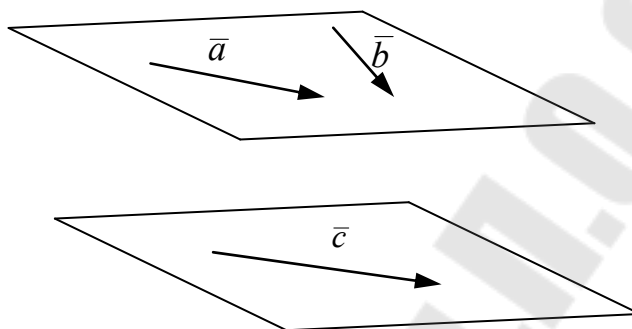


Рис. 3.3. Компланарные векторы

На рис. 3.3 векторы,  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  – компланарны.

#### Определение 3.1.7

Векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называются *равными*, если

- 1) равны их модули:  $|\bar{a}| = |\bar{b}|$ ;
- 2) они коллинеарны:  $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ;
- 3) они сонаправлены:  $\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{b}$ .

Условие коллинеарности вынесено в отдельный пункт по той причине, что часто установить коллинеарность значительно проще, чем сонаправленность. А если векторы не коллинеарны, то автоматически и не равны друг другу.

#### Теорема 3.1.1

Для любого вектора  $\bar{a}$  и точки  $P$  всегда существует единственный вектор  $\overline{PQ}$ , равный вектору  $\bar{a}$ .

Ниже на рис. 3.4 продемонстрирована идея доказательства теоремы, в основе которого лежит определение равенства векторов и одна из аксиом евклидовой геометрии, а именно: через точку пространства проходит единственная прямая параллельная заданной прямой.

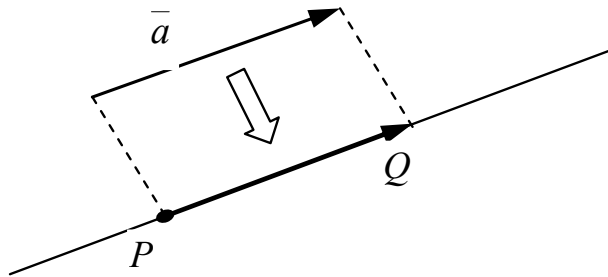


Рис. 3.4. Вектор  $\overline{PQ}$  равен вектору  $\vec{a}$

Теорема позволяет использовать преобразование параллельного переноса для перемещения векторов на плоскости или в пространстве, например, с целью приложения начала одного вектора к концу другого. С точки зрения математики отношение равенства векторов есть отношение эквивалентности, поэтому, по существу, вектор определяет целый класс равных векторов, приложенных к разным точкам пространства. В физике аналогом такого класса является понятие *свободного вектора*.

### 3.2. Линейные операции над векторами

#### Определение 3.2.1

Суммой векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{a} + \vec{b}$ , идущий из начала вектора  $\vec{a}$  в конец вектора  $\vec{b}$  при условии, что вектор  $\vec{b}$  приложен к концу вектора  $\vec{a}$ .

Имеется два геометрических способа суммирования векторов:

- 1) сложение векторов по **правилу треугольника** (рис. 3.5);
- 2) сложение векторов по **правилу параллелограмма** (рис. 3.6).

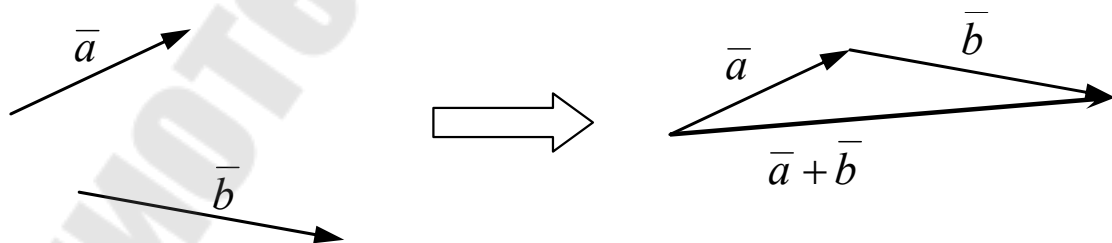


Рис. 3.5. Сложение векторов по правилу треугольника

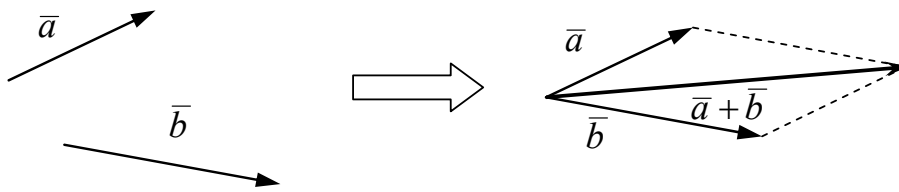


Рис. 3.6. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Сложение векторов по правилу треугольника удобно при суммировании нескольких векторов. При этом векторы выстраиваются в цепочку (рис. 3.7).

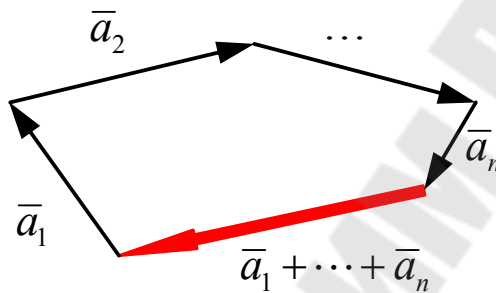


Рис. 3.7. Суммирование системы векторов по правилу треугольника

Интересна ситуация, когда начало первого вектора и конец последнего совпадают. В этом случае сумма векторов равна нулю (нулевому вектору), а сами векторы образуют многоугольник.

Сложение по правилу параллелограмма часто используется в механике, когда, например, на тело действуют несколько сил, приложенных к одной точке, и требуется определить результирующую силу. Здесь уместно вспомнить басню Крылова «Лебедь, щука и рак» (рис. 3.8).

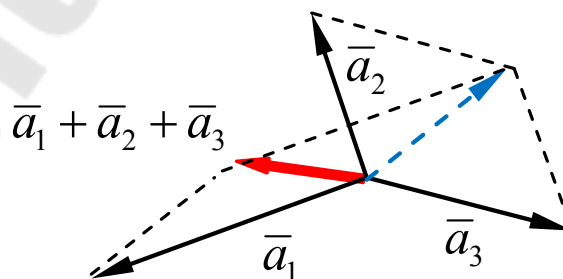


Рис. 3.8. Сложение трех векторов по правилу параллелограмма

### Определение 3.2.2

Произведением ненулевого вектора  $\bar{a}$  на действительное число  $\lambda$  называется вектор  $\lambda\bar{a}$ , модуль которого равен произведению модулей числа и вектора:

$$|\lambda\bar{a}| = |\lambda| |\bar{a}|, \quad (3.2.1)$$

и который коллинеарен вектору  $\bar{a}$ , причем

$$\lambda\bar{a} \uparrow\uparrow \bar{a}, \text{ если } \lambda > 0, \text{ и } \lambda\bar{a} \uparrow\downarrow \bar{a}, \text{ если } \lambda < 0.$$

В случае, когда  $\lambda = 0$  или  $\bar{a} = \bar{0}$ , имеем:  $\lambda\bar{a} = \bar{0}$ .

Сейчас действия над векторами введены как особый вид геометрических построений. Очевидным преимуществом такого подхода является наглядность, что отчасти и объясняет широкое использование векторной алгебры в различных разделах физики и ее технических приложениях, где основные величины (перемещения, скорости, ускорения, силы, напряженности электрических и магнитных полей и др.) представимы как геометрические векторы.

Тем не менее здесь необходимо сделать несколько замечаний.

Во-первых, при выполнении последовательности из нескольких операций геометрические построения усложняются, причем значительно, если векторы приложены к разным точкам.

Во-вторых, не любая величина, имеющая направление и одновременно числовую характеристику, может быть представлена как элемент векторной алгебры. Так, например, поток автомобилей можно однозначно описать, указав направление движения и интенсивность потока (количество автомобилей, проходящих через контрольный пост за определенный промежуток времени). Но попытка сложения потоков на перекрестке по правилам сложения геометрических векторов приводит к явно бессмысленному результату, как показано на рис. 3.9.

Дело в том, что потоки автомобилей определены на множестве автомобильных дорог и могут иметь направления только вдоль дорог, а геометрические векторы никаких ограничений на направление не имеют.

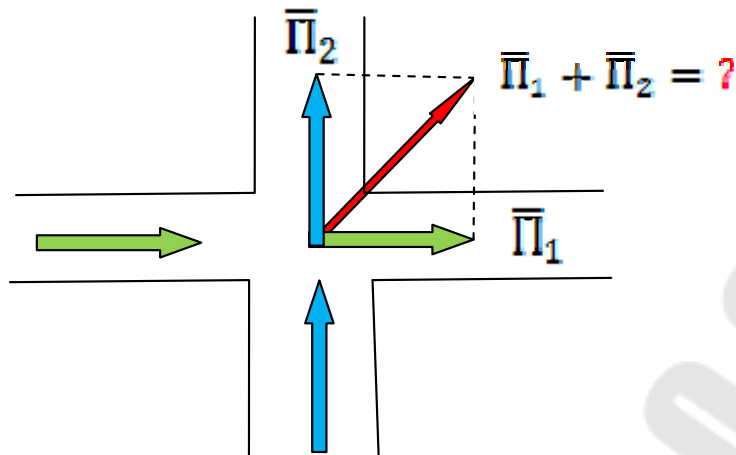


Рис. 3.9. Потоки автомобилей на перекрестке дорог

И, наконец, в-третьих, чисто геометрический подход к определению операций над векторами моментально теряет всю свою наглядность, а значит, и практическую привлекательность с точки зрения приложений, при попытках обобщения понятия вектора на многомерные пространства, например, на четырехмерное пространство-время в теории относительности, на шестимерное конфигурационное пространство перемещений-скоростей в механике.

Здесь уже существенными становятся не сами определения операций, а их свойства.

### Теорема 3.2.1

Операции сложения векторов и умножения их на число обладают следующими общими свойствами:

- 1)  $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$  (коммутативность суммы)
- 2)  $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$  (ассоциативность суммы)
- 3)  $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$  (свойство нулевого вектора)
- 4)  $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$  (свойство противоположного вектора)
- 5)  $\lambda(\mu\bar{a}) = (\lambda\mu)\bar{a}$  (ассоциативность умножения на число)
- 6)  $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$  (дистрибутивность)
- 7)  $(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$  (дистрибутивность)
- 8)  $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$  (свойство единичного коэффициента)

Доказательство теоремы основано на геометрическом построении результирующих векторов для левой и правой части равенств, и их сравнении друг с другом, т. е. на проверке равенства их модулей

и сонаправленности. Отметим формальное совпадение операций сложения векторов и умножения их на число с аналогичными свойствами для матриц (теорема 1.8.1.). По этой причине они также называются *линейными операциями*, но над *векторами*.

Важность теоремы 3.2.1 заключается в том, что свойства операций над векторами не несут никакой геометрической нагрузки, являются чисто алгебраическими, а поэтому они могут быть постулированы, и с их помощью можно ввести понятие вектора в пространствах любой природы. Так геометрическому понятию коллинеарности векторов можно дать следующую чисто алгебраическую трактовку.

**Теорема 3.2.2** (о коллинеарных векторах)

Для того чтобы два ненулевых вектора  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  были коллинеарными необходимо и достаточно, чтобы нашлось число  $\lambda$  такое, что

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}. \quad (3.2.2)$$

Действительно,  $\lambda \vec{a} \parallel \vec{a}$  по определению, но и  $\vec{b} \parallel \lambda \vec{a}$  в силу их предполагаемого равенства. Тогда с учетом того, что отношение коллинеарности является транзитивным, имеем  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ . Таким образом, равенство (3.2.2) возможно только для коллинеарных векторов. Значение множителя  $\lambda$  равно отношению модулей векторов взятому со знаком плюс или минус в зависимости от того являются ли векторы сонаправленными или противоположно направленными.

Разность векторов, вообще говоря, есть композиция двух линейных операций:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}. \quad (3.2.3)$$

Однако в приложениях из удобства ее часто рассматривают как отдельную специальную операцию.

**Определение 3.2.3**

*Разностью векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется вектор  $\vec{a} - \vec{b}$ , идущий из конца вектора  $\vec{b}$  в конец вектора  $\vec{a}$  при условии, что начала векторов совпадают.*

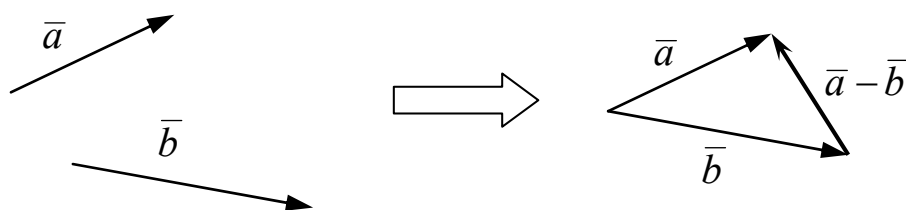


Рис. 3.10. Разность векторов

Как видно на рис. 3.10, вектор разности соединяет концы векторов, имеющих общее начало, и «направлен в конец вектора, из которого вычитают».

### 3.3. Размерность и базис пространств векторов

Пусть имеется система векторов  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ . Из векторов системы с помощью линейных операций составим новый вектор:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n, \quad (3.3.1)$$

который будем называть *линейной комбинацией*.

#### Определение 3.3.1

Система векторов  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  называется *линейно независимой*, если их линейная комбинация может быть нулевым вектором только при нулевых коэффициентах:

$$\lambda_1 \bar{a}_1 + \lambda_2 \bar{a}_2 + \dots + \lambda_n \bar{a}_n = \bar{0}; \quad (3.3.2)$$

⇓

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

В противном случае система называется *линейно зависимой*.

Суть линейной независимости заключается в том, что ни один вектор линейно независимой системы не может быть представлен в виде линейной комбинации других векторов этой же системы.

#### Критерии линейной зависимости векторов:

I. Всякая система, содержащая нулевой вектор  $\bar{0}$ , линейно зависима.

II. Всякая система, содержащая подмножество линейно зависимых векторов, линейно зависима.

III. Всякая система, содержащая хотя бы два коллинеарных вектора, линейно зависима.

IV. Всякая система, содержащая хотя бы три компланарных вектора, линейно зависима.

V. Всякая система, содержащая четыре и более геометрических вектора, линейно зависима.

Для доказательства справедливости критериев I–V достаточно указать хотя бы один ненулевой набор коэффициентов, который обеспечивал бы выполнение равенства (3.3.2). Причем с учетом чисто геометрического определения линейных операций над векторами линейную зависимость можно установить и с помощью конкретных построений параллелограммов и параллелепипедов.

Линейная независимость есть качественное свойство системы векторов. Однако тот факт, что при изменении состава векторов система это свойство может утрачивать или сохранять, позволяет ввести фундаментальную числовую характеристику векторных пространств.

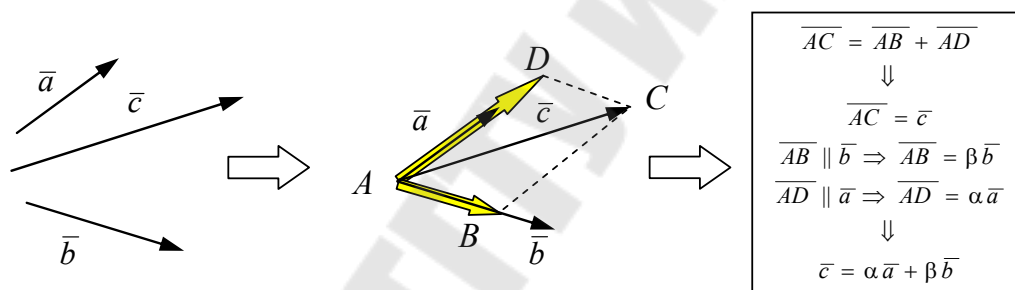


Рис. 3.11. Линейная зависимость трех компланарных векторов

### Определение 3.3.2

Размерностью векторного пространства  $V$  называется максимальное число его линейно независимых векторов.

Размерность пространства  $V$  обозначается как  $\dim V$ . Для указания размерности часто используются также верхние индексы:  $V^n$ .

### Определение 3.3.3

Базисом векторного пространства  $V$ , размерность которого равна  $n$ , называется любая система, состоящая из  $n$  линейно независимых векторов этого пространства.

**Пример 3.3.1.** *Пространство коллинеарных векторов.*

Размерность пространства коллинеарных векторов равна 1, так как любые два коллинеарных вектора линейно зависимы.

Любой ненулевой вектор пространства  $\bar{a} \neq \bar{0}$  образует базис  $\{\bar{a}\}$ .

**Пример 3.3.2.** *Пространство компланарных векторов.*

Размерность пространства компланарных векторов равна 2, так как любые три компланарных вектора линейно зависимы (рис. 3.11).

Любые два неколлинеарных вектора пространства  $(\bar{a} \nparallel \bar{b})$  образуют базис  $\{\bar{a}, \bar{b}\}$ .

**Пример 3.3.3.** *Пространство геометрических векторов.*

Размерность пространства геометрических векторов равна 3, так как в евклидовой геометрии любые четыре вектора линейно зависимы.

Любые три некопланарных вектора образуют базис пространства геометрических векторов  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ .

**Теорема 3.3.1** (о базисе)

Пусть  $\mathcal{A} = \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$  – некоторый фиксированный базис  $n$ -мерного векторного пространства  $V$ . Тогда любой вектор  $\bar{b}$  этого пространства единственным образом может бы разложен по базису  $\mathcal{A}$ :

$$\bar{b} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n. \quad (3.3.3)$$

Коэффициенты разложения  $\alpha_k$  называются **координатами вектора  $\bar{b}$  в базисе  $\mathcal{A}$** . Специально подчеркнем, что говорить о координатах векторов без указания базиса бессмысленно, так как в разных базисах вектор имеет разные координаты.

Фундаментальная значимость теоремы о базисе заключается в том, что вектору, изначально геометрическому объекту, ставится в соответствие однозначно определенный набор действительных чисел  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ , что позволяет свести операции над векторами к арифметическим действиям над числами-координатами.

### Теорема 3.3.2

Пусть векторы  $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  и  $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$  заданы своими координатами в некотором фиксированном базисе  $\mathcal{G} = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_n\}$   $n$ -мерного векторного пространства  $V$ . Тогда при сложении векторов все их соответствующие координаты складываются, а при умножении на число  $\lambda$  – умножаются на это число:

$$\bar{a} + \bar{b} = \{\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n\}; \quad (3.3.4)$$

$$\lambda \bar{a} = \{\lambda \alpha_1, \lambda \alpha_2, \dots, \lambda \alpha_n\}. \quad (3.3.5)$$

В качестве одного важного следствия теоремы 3.3.2 и теоремы 3.2.2 отметим критерий коллинеарности векторов, основанный на сравнении координат.

**Следствие** (условие коллинеарности в координатной форме)

Для коллинеарности двух векторов  $\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$  и  $\bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ , заданных своими координатами в одном базисе, необходима и достаточна пропорциональность их координат:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \dots = \frac{\alpha_n}{\beta_n}. \quad (3.3.6)$$

Заметим, что в соотношениях пропорциональности типа (3.3.6) формально допускаются и нули в знаменателях. В этом случае пропорцию в форме равенства частных необходимо заменить эквивалентным соотношением в форме равенства произведений:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{0} \Rightarrow a \cdot 0 = b \cdot c.$$

### 3.4. Декартов базис и декартовы координаты векторов

Базисные системы в принципе можно задавать с помощью любого набора линейно независимых векторов, число которых должно совпадать с размерностью пространства. Однако не все базисы удобны для конкретных расчетов.

### Определение 3.4.1

*Ортонормированным базисом*  $\mathcal{E}$  векторного пространства  $V$  размерности  $n$ , называется базис, состоящий из  $n$  взаимно ортогональных ортов  $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ .

Для геометрических векторов термин ортогональность означает перпендикулярность. Напомним, что орты – это единичные векторы. Применительно к пространству евклидовой геометрии ортонормированный базис имеет специальное название и обозначение.

Введем понятие ориентации для упорядоченной тройки векторов.

### Определение 3.4.2

Тройка некопланарных векторов  $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$  называется *правой* (*левой*), если, будучи приведенной к общему началу, векторы располагаются по направлению указательного, среднего и большого пальцев правой (левой) руки соответственно.

В физике в отличие от математики вместо явно антропологического определения ориентации принято использовать так называемое **правило буравчика**. Существование правых и левых упорядоченных троек векторов есть фундаментальное свойство пространства. Тройки разной ориентации нельзя совместить никакой последовательностью параллельных переносов и поворотов, т. е. композицией непрерывных преобразований пространства.

### Определение 3.4.3

*Декартовым базисом* трехмерного евклидова пространства называется правая тройка взаимно перпендикулярных единичных векторов  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .

Разложение вектора  $\bar{a}$  по декартовому базису записывается как

$$\bar{a} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}. \quad (3.4.1)$$

Коэффициенты разложения  $X, Y, Z$  называются **декартовыми координатами вектора  $\bar{a}$** . Декартовы координаты однозначно определяют вектор, поэтому вместо разложения (4.3.1) пишут:

$$\bar{a} = \{X, Y, Z\}.$$

Базисные векторы задают направления **координатных осей**, проходящих через них:  $\bar{i}$  – ось  $Ox$ ;  $\bar{j}$  – ось  $Oy$ ;  $\bar{k}$  – ось  $Oz$  (рис. 3.12).

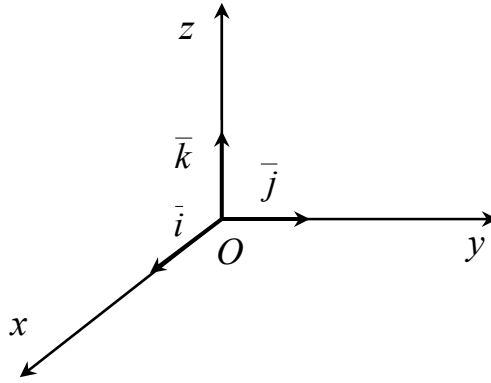


Рис. 3.12. Декартов базис

**Определение 3.4.4**

Проекцией вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  называется величина направленного отрезка  $A'B'$ , где  $A'$  и  $B'$  – ортогональные проекции точек  $A$  и  $B$  на ось  $l$ .

Проекция вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$  приведена на рис. 3.13.

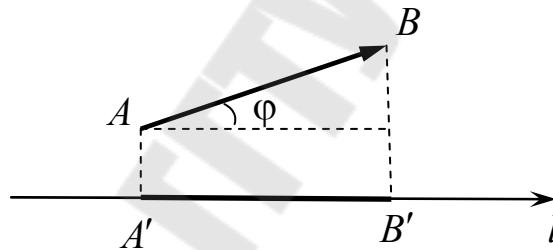


Рис. 3.13. Проекция вектора  $\overline{AB}$  на ось  $l$

В отличие от длины отрезка, которая по определению есть положительное действительное число, проекция имеет знак:

- $\text{пр}_l \overline{AB} > 0$ , если вектор  $\overline{A'B'}$  сонаправлен с осью  $l$ ;
- $\text{пр}_l \overline{AB} < 0$ , если вектор  $\overline{A'B'}$  и ось  $l$  имеют разные направления.

Обозначим через  $\varphi$  угол между вектором  $\overline{a}$  и положительным направлением оси  $l$ . Тогда проекция вектора  $\overline{a}$  на ось  $l$  вычисляется по формуле

$$\text{пр}_l \overline{a} = |\overline{a}| \cos \varphi. \quad (3.4.2)$$

Декартовы координаты напрямую связаны с проекциями вектора на координатные оси.

### Теорема 3.4.1

Декартовы координаты  $X, Y, Z$  вектора  $\bar{a}$  равны ортогональным проекциям этого вектора на координатные оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$  соответственно.

Из теоремы 3.4.1. с учетом формулы (3.4.2) для декартовых координат вектора  $\bar{a}$  получаем следующий набор соотношений:

$$X = |\bar{a}| \cos \alpha, \quad Y = |\bar{a}| \cos \beta, \quad Z = |\bar{a}| \cos \gamma. \quad (3.4.3)$$

Здесь  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  – углы между вектором  $\bar{a}$  и координатными осями  $Ox, Oy$  и  $Oz$ . Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора  $\bar{a}$ .

С другой стороны, вектор  $\bar{a}$  совпадает с диагональю прямоугольного параллелепипеда, построенного на проекциях вектора  $\bar{a}$  на координатные оси. Поэтому модуль вектора  $\bar{a}$  с учетом формулы Пифагора для диагонали прямоугольного параллелепипеда можно вычислить непосредственно через декартовы координаты:

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}. \quad (3.4.4)$$

Подставляя это выражение для модуля вектора  $|\bar{a}|$  в формулы (3.4.4), для направляющих косинусов находим:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}; \\ \cos \gamma &= \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}. \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

Набор соотношений (3.4.4) и (3.4.5) позволяет вычислить все характеристики вектора по его декартовым координатам.

Направляющие косинусы связаны друг с другом соотношением

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (3.4.6)$$

которое легко получить из равенств (3.4.5) путем возведения их в квадрат с последующим сложением. Таким образом, направляющие косинусы суть декартовы координаты орта

$$\bar{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\},$$

задающего направление вектора  $\bar{a}$ .

## Лекция 7

### 3.5. Скалярное произведение векторов

Введем над векторами операцию, которая позволяет из векторов получать числовые величины.

#### Определение 3.5.1

Скалярным произведением двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  называется действительное число, равное произведению модулей векторов на косинус угла между ними  $\varphi$ :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (3.5.1)$$

Для обозначения скалярного произведения кроме точки используются также и круглые скобки:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv (\vec{a}, \vec{b}).$$

Заметим, что произведение  $|\vec{a}| \cos \varphi$  есть проекция вектора  $\vec{a}$  на ось, задаваемую вектором  $\vec{b}$ . Поэтому скалярное произведение можно записать как

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| \operatorname{pr}_{\vec{b}} \vec{a}. \quad (3.5.2)$$

Возьмем в качестве вектора  $\vec{b}$  орт  $\vec{e}$ . Тогда из соотношения (3.5.2) получаем формулу для вычисления проекции вектора  $\vec{a}$  на ось, задаваемую ортом  $\vec{e}$ :

$$\operatorname{pr}_{\vec{e}} \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{e}. \quad (3.5.3)$$

Формула (3.5.3), записанная справа налево, определяет так называемый **геометрический смысл скалярного произведения** как проекции вектора на ось.

С помощью скалярного произведения непосредственно вычисляются:

– модули векторов:

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}; \quad (3.5.4)$$

– косинусы углов между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}. \quad (3.5.5)$$

Следует иметь в виду, что угол между геометрическими векторами по определению принимает значения от  $0$  до  $180^\circ$ . Поэтому в соответствии с формулой (3.5.5), если  $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ , то угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  – острый, а если  $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ , то тупой.

**Теорема 3.5.1** (условие перпендикулярности векторов)

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (3.5.6)$$

Теорема позволяет связать чисто геометрическое отношение «быть перпендикулярным» с выполнением определенного числового равенства.

Рассмотрим алгебраические свойства скалярного произведения.

**Теорема 3.5.2**

Скалярное произведение векторов обладает следующими алгебраическими свойствами:

1)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (коммутативность)

2)  $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$  (однородность)

3)  $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$  (дистрибутивность)

4)  $\vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0$ , причем  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$  тогда

и только тогда, когда  $\vec{a} = \vec{0}$

Заметим, что в силу коммутативности скалярного произведения, свойства однородности и дистрибутивности автоматически переносятся и на второй множитель. Алгебраические свойства используются для упрощения и преобразования векторных выражений.

**Пример 3.5.1.** Найти угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если известно, что  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$ , а угол  $\varphi$  между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ .

*Решение*

Используя линейные операции над векторами, разложим векторы  $\vec{d}_1$  и  $\vec{d}_2$ , определяемые как диагонали параллелограмма, через векторы сторон  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  (рис. 3.14):  $\vec{d}_1 = \vec{a} + \vec{b}$  и  $\vec{d}_2 = \vec{a} - \vec{b}$ .

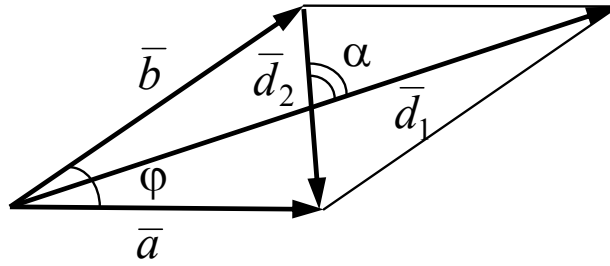


Рис. 3.14. Параллелограмм, построенный на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ . Векторы  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_2$  есть векторы-диагонали параллелограмма

Подставляя вместо векторов  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_2$  эти разложения и используя алгебраические свойства скалярного произведения, последовательно находим:

$$\bar{a}^2 \equiv \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2 = 2^2 = 4;$$

$$\bar{b}^2 \equiv \bar{b} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|^2 = 3^2 = 9;$$

$$\bar{a}\bar{b} \equiv \bar{a} \cdot \bar{b} = 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2} = 3;$$

$$\bar{d}_1 \bar{d}_2 \equiv \bar{d}_1 \cdot \bar{d}_2 = (\bar{a} + \bar{b})(\bar{a} - \bar{b}) = \bar{a}^2 - \bar{b}^2 = 4 - 9 = -5.$$

Заметим, что скалярное произведение векторов-диагоналей  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_2$  отрицательно, а значит, угол между ними тупой. Вместе с тем диагонали как отрезки не имеют направления. По этой причине угол между ними определяется аналогично углу между прямыми, а именно, как острый угол, лежащий в пределах от  $0$  до  $90^\circ$ . Это замечание легко учесть, если для определения угла между диагоналями использовать не сам косинус, а модуль косинуса угла между векторами-диагоналями.

Далее находим длины диагоналей как модули векторов  $\bar{d}_1$  и  $\bar{d}_2$ :

$$\bar{d}_1^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 = \bar{a}^2 + 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b}^2 = 4 + 2 \cdot 3 + 9 = 19 \Rightarrow |\bar{d}_1| = \sqrt{19};$$

$$\bar{d}_2^2 = (\bar{a} - \bar{b})^2 = \bar{a}^2 - 2\bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{b}^2 = 4 - 2 \cdot 3 + 9 = 7 \Rightarrow |\bar{d}_2| = \sqrt{7}.$$

Обозначим через  $\alpha$  угол между диагоналями. Тогда с учетом замечания по формуле (3.5.5) вычисляем:

$$\cos \alpha = \frac{|-5|}{\sqrt{19}\sqrt{7}} = \frac{5}{\sqrt{133}} \approx 0,4335 \Rightarrow \alpha \approx \arccos 0,4335 \approx 64,3^\circ.$$

Ответ:  $64,3^\circ$  ■

Все рассмотренные до сих пор свойства скалярного произведения имели универсальный характер и не зависели от размерности векторного пространства и выбора в нем базиса. Однако, если базис зафиксировать и задавать векторы упорядоченными наборами координат, то оказывается, что именно выбор декартового базиса приводит к наиболее простой формуле для вычисления скалярного произведения.

**Теорема 3.5.3** (скалярное произведение в декартовом базисе)

Пусть векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  заданы своими декартовыми координатами:  $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ . Тогда их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2. \quad (3.5.7)$$

Формула (3.5.7) является прямым следствием ортонормированности векторов декартового базиса  $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ .

Условие перпендикулярности двух векторов в декартовом базисе записывается как

$$X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 = 0 \Leftrightarrow \bar{a} \perp \bar{b}. \quad (3.5.8)$$

**Пример 3.5.2.** Найти значение параметра  $\alpha$ , при котором векторы

$$\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \alpha\bar{k} \text{ и } \bar{b} = \alpha\bar{i} - 4\bar{j} + \bar{k}$$

будут перпендикулярными.

*Решение*

По условию векторы заданы своими декартовыми координатами:

$$\bar{a} = \{2, 3, -\alpha\} \text{ и } \bar{b} = \{\alpha, -4, 1\}.$$

Подставляя координаты векторов в соотношение (3.5.7), находим:

$$2 \cdot \alpha - 3 \cdot 4 - \alpha \cdot 1 = 0 \Rightarrow \alpha - 12 = 0 \Rightarrow \alpha = 12.$$

Ответ: векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  будут перпендикулярны при  $\alpha = 12$ . ■

### 3.6. Векторное произведение векторов

Линейные операции над векторами обладают характерным свойством *замкнутости*. Так, любая линейная комбинация коллинеарных векторов есть вектор, коллинеарный векторам исходной системы. Аналогично результат имеет место и для линейных комбинаций компланарных векторов. Введем операцию над векторами совсем другого типа.

#### Определение 3.6.1

Векторным произведением двух векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  называется вектор  $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$ , модуль и направление которого определяются как:

$$1) |\bar{c}| = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin \varphi; \quad (3.6.1)$$

$$2) \bar{c} \perp \bar{a}, \bar{c} \perp \bar{b};$$

3) тройка векторов  $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$  – правая.

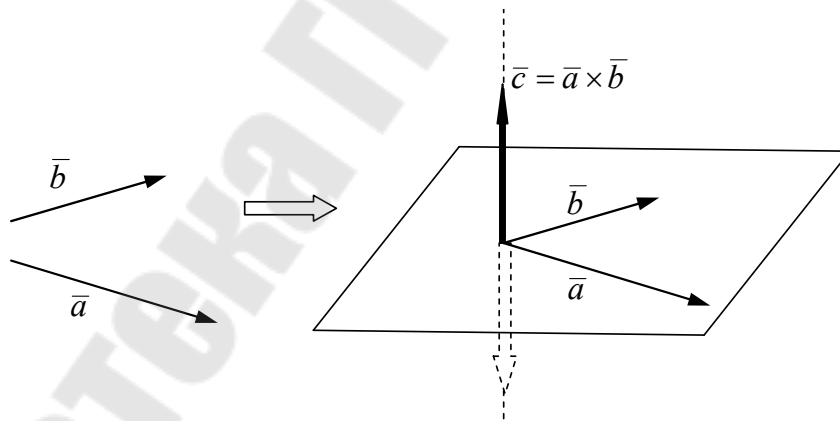


Рис. 3.15. Построение результирующего вектора для векторного произведения векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$

Заметим, что второе и третье условия только совместно однозначно определяют направление результирующего вектора  $\bar{c}$ . Согласно второму условию, вектор  $\bar{c}$  перпендикулярен плоскости векторов  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  (после приведения их к общему началу), а третье условие

позволяет из двух направлений нормали к плоскости выбрать одно (по правилу правой руки), как показано на рис. 3.15.

Для обозначения векторного произведения кроме знака умножения  $\times$  («крестик») используются также и квадратные скобки:

$$\vec{a} \times \vec{b} \equiv [\vec{a}, \vec{b}].$$

**Теорема 3.6.1** (условие коллинеарности векторов)

Необходимым и достаточным условием коллинеарности векторов является равенство нулю их векторного произведения:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}. \quad (3.6.2)$$

Действительно, угол между коллинеарными векторами равен  $0^\circ$  или  $180^\circ$ . Но  $\sin 0^\circ = \sin 180^\circ = 0$ , поэтому, согласно определению 3.6.2, модуль их векторного произведения также равен нулю, а значит, векторное произведение коллинеарных векторов есть нулевой вектор.

**Теорема 3.6.2** (геометрический смысл векторного произведения)

Модуль векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах:

$$S = |\vec{a} \times \vec{b}|. \quad (3.6.3)$$

Обозначим через  $\vec{n}$  орт в направлении вектора  $\vec{a} \times \vec{b}$ . Тогда с учетом формулы (3.6.3) векторное произведение можно записать как (рис. 3.16):

$$\vec{a} \times \vec{b} = S\vec{n}. \quad (3.6.4)$$

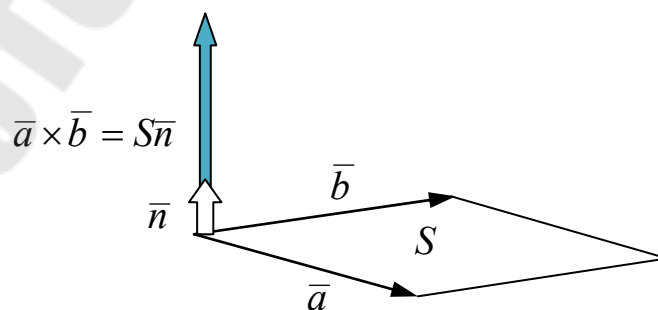


Рис. 3.16. Геометрический смысл векторного произведения векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$

### Теорема 3.6.3 (алгебраические свойства векторного произведения)

Векторное произведение обладает следующими свойствами:

- 1)  $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$  (антикоммутативность)
- 2)  $(\lambda \bar{a}) \times \bar{b} = \bar{a} \times (\lambda \bar{b}) = \lambda \bar{a} \times \bar{b}$  (однородность)
- 3)  $(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}$  (дистрибутивность)
- 4)  $\bar{a} \times \bar{a} = 0$  для  $\forall \bar{a}$

Алгебраические свойства векторного произведения используются для упрощения и преобразования векторных выражений.

**Пример 3.6.1.** Упростить выражение  $(3\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) \times (\bar{a} - \bar{b})$ .

*Решение*

Для упрощения выражения следует раскрыть скобки, сохраняя порядок сомножителей, и далее при необходимости поменять порядок с учетом того, что векторное произведение антикоммутативно и равно нулю для равных сомножителей:

$$\begin{aligned} (3\bar{a} + 2\bar{b} - \bar{c}) \times (\bar{a} - \bar{b}) &= 3\bar{a} \times \bar{a} - 3\bar{a} \times \bar{b} + \\ &+ 2\bar{b} \times \bar{a} - 2\bar{b} \times \bar{b} - \bar{c} \times \bar{a} + \bar{c} \times \bar{b} = -5\bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c} - \bar{b} \times \bar{c}. \end{aligned}$$

■

Рассмотрим вычисление векторного произведения в случае, если векторы заданы своими декартовыми координатами.

### Теорема 3.6.4

Пусть векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  заданы своими декартовыми координатами:  $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ . Тогда их векторное произведение может быть представлено в форме следующего определителя:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (3.6.5)$$

Явный вид разложения и декартовы координаты вектора  $\bar{a} \times \bar{b}$  получаются после формального разложения определителя по первой строке. Для вывода формулы (3.6.5) полезны следующие соотношения для векторов декартового базиса:

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}. \quad (3.6.6)$$

**Пример 3.6.2.** Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах  $\vec{a} = \{-1, 2, 5\}$  и  $\vec{b} = \{3, 4, -1\}$ , заданных своими декартовыми координатами.

*Решение*

Искомая площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, построенного на заданных векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ . Поэтому сначала по формуле (3.6.5) найдем векторное произведение:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}(-2 - 20) - \vec{j}(1 - 15) + \vec{k}(-4 - 6) = -22\vec{i} + 14\vec{j} - 10\vec{k}.$$

Тогда для площади треугольника получаем:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{(-22)^2 + 14^2 + (-10)^2} = \sqrt{195} \approx 13,96.$$

*Ответ:*  $S = \sqrt{195} \approx 13,96$ , кв. ед. ■

### 3.7. Смешанное произведение векторов

Рассмотрим композицию скалярного и векторного произведений векторов.

*Определение 3.7.1*

Смешанным произведением трех векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  называется действительное число, определяемое как скалярное произведение вектора  $\vec{a}$  на результирующий вектор векторного произведения векторов  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$ :

$$\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}].$$

С вычислением смешанного произведения связано решение многих задач в геометрии и линейной алгебре.

### Теорема 3.7.1 (геометрический смысл смешанного произведения)

Смешанное произведение векторов  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах после приведения их к общему началу, и взятому со знаком «+», если тройка векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  правая, и со знаком «-», если левая.

Доказательство теоремы основано на использовании формул (3.5.3) и (3.6.1), определяющих геометрический смысл скалярного и векторного произведений, и стандартной формулы для вычисления объема параллелепипеда:  $V_{\text{пар}} = S \cdot H$ , где  $S$  – площадь основания, а  $H$  – высота. При этом ориентация тройки векторов  $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$  существенна для определения знака проекции первого вектора, а именно: вектора  $\vec{a}$ , на ось, задаваемую вектором  $\vec{b} \times \vec{c}$  (векторы  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  задают основание параллелепипеда).

#### Задачи, которые решаются с помощью теоремы 3.6.2

1. Вычисление объемов параллелепипедов (рис. 3.17).

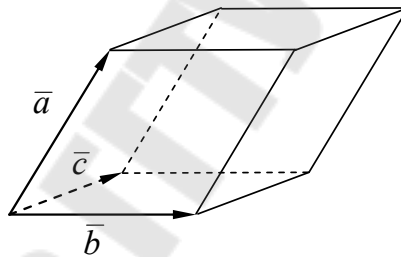


Рис. 3.17. Вычисление объема параллелепипеда

Объем параллелепипеда, изображенного на рис. 3.17, вычисляется по формуле

$$V_{\text{пар}} = |\vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}]|. \quad (3.7.1)$$

2. Вычисление объемов треугольных пирамид (рис. 3.18).

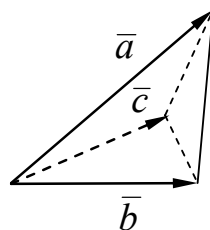


Рис. 3.18. Вычисление объема треугольной пирамиды

Объем пирамиды (рис. 3.18) вычисляется по формуле

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\bar{a} \cdot [\bar{b} \times \bar{c}]|. \quad (3.7.2)$$

3. Определение ориентации упорядоченной тройки векторов:

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] > 0 \Rightarrow$  тройка  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$  *правая*;

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] < 0 \Rightarrow$  тройка  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$  *левая*.

4. Проверка компланарности векторов и возможности составлять из них базис:

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] = 0 \Rightarrow$  векторы  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$  *компланарны* и не могут образовывать базис в трехмерном пространстве;

$\bar{a}_1 \cdot [\bar{a}_2 \times \bar{a}_3] \neq 0 \Rightarrow$  векторы  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$  *некомпланарны* и *могут образовывать базис* в трехмерном пространстве.

**Теорема 3.7.2** (алгебраическое свойство смешанного произведения)

Для смешанного произведения векторов  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  справедливо равенство

$$\bar{a} \cdot [\bar{b} \times \bar{c}] = [\bar{a} \times \bar{b}] \cdot \bar{c}. \quad (3.7.3)$$

Суть этого свойства заключается в том, что результат вычисления смешанного произведения не зависит от расстановки знаков умножения. По этой причине смешанное произведение часто обозначают просто как  $\bar{a} \bar{b} \bar{c}$ , вообще опуская знаки умножения.

Рассмотрим вопрос вычисления смешанного произведения векторов в случае, когда векторы заданы своими координатами в некотором базисе.

**Теорема 3.7.3**

Пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  заданы своими декартовыми координатами:  $\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\}$ ,  $\bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$ ,  $\bar{c} = \{X_3, Y_3, Z_3\}$ . Тогда их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\bar{a} \bar{b} \bar{c} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}. \quad (3.7.4)$$

В правой части равенства (3.7.4) стоит определитель третьего порядка, составленный из декартовых координат векторов.

Теорема допускает простое обобщение и на случай произвольного базиса.

### Теорема 3.7.4

Пусть векторы  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  и  $\bar{c}$  заданы своими координатами:

$$\bar{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \bar{b} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}, \quad \bar{c} = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\}$$

в некотором базисе  $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ . Тогда их смешанное произведение может быть вычислено по формуле

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3, \quad (3.7.5)$$

где  $\bar{e}_1\bar{e}_2\bar{e}_3$  – смешанное произведение базисных векторов.

Заметим, что смешанное произведение базисных векторов декартового базиса равно  $\bar{i}\bar{j}\bar{k} = +1$ .

**Пример 3.7.1.** Вычислить объем треугольной пирамиды, построенной на векторах  $\bar{a} = \{3, -1, 4\}$  и  $\bar{b} = \{5, 2, -3\}$  и  $\bar{c} = \{-4, 6, 2\}$ , заданных своими декартовыми координатами.

#### Решение

Сначала вычислим смешанное произведение векторов. По формуле (3.7.4) находим:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 12 + 120 - (-32 - 54 - 10) = 216.$$

Далее для вычисления объема пирамиды воспользуемся формулой (3.7.2):

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{6} |\bar{a}\bar{b}\bar{c}| = \frac{1}{6} \cdot 216 = 36.$$

Ответ:  $V_{\text{пир}} = 36$  (куб. ед.)

■

### ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 3

Указать координаты каждого из данных векторов в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4, \bar{e}_5$ .

111. а)  $\bar{x} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - 4\bar{e}_3 + \bar{e}_4 - \bar{e}_5$ ;

б)  $\bar{x} = \bar{e}_1 + \bar{e}_3 - \bar{e}_5$ ;

в)  $\bar{x} = -3\bar{e}_5 - 2\bar{e}_4 - \bar{e}_1 + 3\bar{e}_3$ .

112. а)  $\bar{x} = \bar{e}_2 + 8\bar{e}_3 - \bar{e}_4 + 3\bar{e}_5$ ;

б)  $\bar{x} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 3\bar{e}_1$ ;

в)  $\bar{x} = 7\bar{e}_1 + 5\bar{e}_5 - 4\bar{e}_3$ .

Найти координаты вектора  $\bar{c}$ .

113.  $\bar{a}(2, 3, -1), \bar{b}(0, 1, 2), \bar{c} = 2\bar{a} + 3\bar{b}$ .

114.  $\bar{a}(0, -5, 4, 1), \bar{b}(7, 2, 0, -1), \bar{c} = \bar{a} - \bar{b}$ .

115.  $\bar{a}(-1, 0), \bar{b}(2, -3), 2\bar{a} + 3\bar{c} = \bar{b}$ .

116.  $\bar{a}(2, -1, 4), \bar{b}(1, 0, -2), 5\bar{a} = \bar{b} + \bar{c}$ .

Выяснить, являются ли векторы, заданные в некотором базисе, линейно зависимыми.

117.  $\bar{a}_1(-1, 2, 0), \bar{a}_2(3, 1, -1), \bar{a}_3(4, 0, 2)$ .

118.  $\bar{a}_1(4, 5, -3), \bar{a}_2(0, 1, 1), \bar{a}_3(2, -1, 1)$ .

Выяснить, является ли вектор  $\bar{a}_4$  линейной комбинацией векторов  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ .

119.  $\bar{a}_1(-2, 1, 0), \bar{a}_2(3, -1, 1), \bar{a}_3(2, 0, -2), \bar{a}_4(1, 1, 1)$ .

120.  $\bar{a}_1(2, 4, 3), \bar{a}_2(1, -1, 0), \bar{a}_3(3, 3, 3), \bar{a}_4(-1, 2, 0)$ .

Показать, что векторы  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  образуют базис и найти координаты вектора  $\bar{d}$  в этом базисе.

121.  $\bar{a}_1(1, 2), \bar{a}_2(-1, 4), \bar{d}(3, -7)$ .

122.  $\bar{a}_1(2, -3), \bar{a}_2(5, -6), \bar{d}(3, -9)$ .

Показать, что векторы  $\bar{a}_1, \bar{a}_2$  и  $\bar{a}_3$  образуют базис и найти координаты вектора  $\bar{d}$  в этом базисе.

123.  $\bar{a}_1(1, 2, 3), \bar{a}_2(-1, 4, 0), \bar{a}_3(1, 0, 0), \bar{d}(5, 2, -6)$ .

124.  $\bar{a}_1(0, -1, 4), \bar{a}_2(3, 0, -1), \bar{a}_3(2, 1, -2), \bar{d}(-1, 0, 5)$ .

Даны векторы базиса  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ , образующие ортонормированный базис. Найти угол между векторами  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ .

125.  $\bar{x} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}, \bar{y} = \bar{j} - 4\bar{i}$ .

126.  $\bar{x} = 3\bar{j} - \bar{k}, \bar{y} = 4\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$ .

Вычислить площадь параллелограмма, сторонами которого служат векторы  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

127.  $\bar{a} = 2\bar{m} + 3\bar{n}, \bar{b} = 2\bar{m} + 3\bar{n}, |\bar{m}| = 1, |\bar{n}| = 1, (\bar{m}, \bar{n}) = \frac{\pi}{4}$ .

128.  $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}, \bar{b} = \bar{m} + \bar{n}, |\bar{m}| = 4, |\bar{n}| = 3, (\bar{m}, \bar{n}) = \frac{\pi}{6}$ .

Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ .

129.  $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - 2\bar{k}, \bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j} - 2\bar{k}$ .

130.  $\bar{a} = \bar{i} - \bar{j} + \bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$ .

Дан треугольник с вершинами  $A, B, C$ . Найти его площадь.

131.  $A(4, 2, 5), B(0, 3, 2), C(0, 2, 5)$ .

132.  $A(1, 2, 1), B(0, 3, 4), C(2, 1, 3)$ .

133. Даны точки:  $A(2, 1, 0), B(0, 3, 2), C(0, 2, 5), D(3, -4, 5)$ .

Найти длину высоты АН треугольника ABC.

Найти смешанное произведение векторов  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

134.  $\bar{a} = 3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - 3\bar{k}, \bar{c} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ .

135.  $\bar{a} = 2\bar{i} - \bar{k} + \bar{j}, \bar{b} = \bar{i} - 4\bar{j} + 5\bar{k}, \bar{c} = \bar{i} - \bar{k}$ .

Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ .

136.  $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = \bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}, \bar{c} = 3\bar{i} - 4\bar{j} + 2\bar{k}$ .

137.  $\bar{a} = 3\bar{i} + 6\bar{j} - 8\bar{k}, \bar{b} = -2\bar{i} + 4\bar{j} - 6\bar{k}, \bar{c} = 5\bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$ .

Проверить, лежат ли точки  $A, B, C, D$  в одной плоскости.

138.  $A(0, 2, -1), B(3, 1, 1), C(2, -1, 0), D(-4, 1, 2)$ .

139.  $A(1, 3, 2), B(3, 1, 2), C(2, 0, -1), D(-1, 2, 1)$ .

Найти объем пирамиды ABCD.

140.  $A(1, 0, 4), B(2, 7, 3), C(4, 0, -1), D(2, 8, -1)$ .

141.  $A(3, 5, 4), B(8, 7, 4), C(5, 10, 4), D(4, 7, 8)$ .

## Лекция 8

### Глава 4. Аналитическая геометрия

*Аналитическая геометрия* – раздел геометрии, в которой простейшие геометрические объекты (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) исследуются средствами алгебры на основе метода координат. Основная заслуга в создании метода координат принадлежит великому французскому мыслителю **Рене Декарту** (1596–1650).

Основные понятия геометрии – *точка, прямая, плоскость*, относятся к категории начальных неопределяемых понятий. Безупречным с научной точки зрения методом введения таких понятий является *аксиоматический подход*. Применительно к геометрии окончательная формулировка системы аксиом, лежащих в основе плоской (евклидовой) геометрии, принадлежит выдающемуся немецкому математику **Давиду Гильберту** (1862–1943). Именно аксиоматический подход закладывает фундамент для метода координат. В дальнейшем мы будем считать доказанным возможность установления взаимно однозначного соответствия между множеством всех точек прямой и множеством действительных чисел.

#### 4.1. Декартовы координаты точек в пространстве

Когда мы пытаемся указать собеседнику, как добраться до какого-нибудь конкретного пункта назначения, то обычно в качестве первого ориентира указывается общеизвестное место (здание, площадь, памятник, высокая гора и т. п.), а затем предлагается двигаться в определенном направлении (налево, направо, вдоль шоссе и т. п.) на какое-то расстояние. По существу, при описании маршрута мы бессознательно пользуемся своего рода *системой координат*. Дадим соответствующее математическое определение, предварительно отметив, что для задания направлений наиболее естественно использовать векторы.

##### Определение 4.1.1

*Декартовой системой координат* в евклидовом (плоском) пространстве  $\mathbb{E}^3$  называется система, состоящая из двух объектов  $\mathfrak{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$ , где  $O$  – фиксированная точка пространства, называемая *началом отсчета*, а  $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  – фиксированный декартов базис, начала векторов которого совмещены с точкой  $O$ .

Базисные векторы задают координатные оси, проходящие через начало координат – точку  $O$ . Принято ось  $Ox$  называть **осью абсцисс**, ось  $Oy$  – **осью ординат**, а ось  $Oz$  – **осью аппликат**.

Возьмем в пространстве произвольную точку  $M$ .

*Определение 4.1.2*

Вектор  $\overline{OM}$  называется *радиус-вектором* точки  $M$ :

$$\bar{r}_M = \overline{OM}.$$

На рис. 4.1 показан радиус-вектор точки  $M$ .

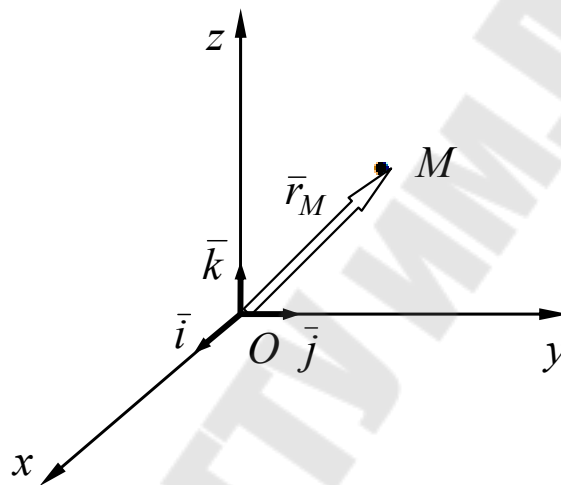


Рис. 4.1. Радиус-вектор точки  $M$

Тот факт, что *любой* точке пространства можно поставить в соответствие *единственный* вектор, лежит в основе аналитической геометрии и позволяет для описания геометрических объектов использовать напрямую математический аппарат векторной алгебры.

Пусть в базисе  $\mathcal{B} = \{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$  радиус-вектор  $\overline{OM}$  имеет разложение:

$$\overline{OM} = X\bar{i} + Y\bar{j} + Z\bar{k}.$$

*Определение 4.1.2*

*Декартовыми координатами* точки  $M$  в системе координат  $\mathcal{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$  называются координаты ее радиус-вектора:

$$x_M = X, y_M = Y, z_M = Z.$$

Координаты точки в отличие от координат вектора принято обозначать *малыми латинскими буквами*. Координаты однозначно определяют положение точки в пространстве *только при заданной системе координат* и обычно указываются как:

$$M(x, y, z).$$

Решение геометрических задач в аналитической геометрии (в отличие от школьной геометрии, в которой изложение в основном ведется в рамках аксиоматического подхода), связано с использованием операций над векторами.

### Теорема 4.1.1

Пусть в пространстве  $\mathbb{E}^3$  заданы точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ . Тогда расстояние между точками  $M_1$  и  $M_2$  определяется по формуле

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (4.1.1)$$

На рис. 4.2 указаны геометрические построения, иллюстрирующие метод вычисления расстояний между точками  $M_1$  и  $M_2$ . Искомое расстояние  $\rho$ , по существу, определяется как модуль вектора  $\overline{M_1M_2}$ :

$$\rho = |\overline{M_1M_2}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|.$$

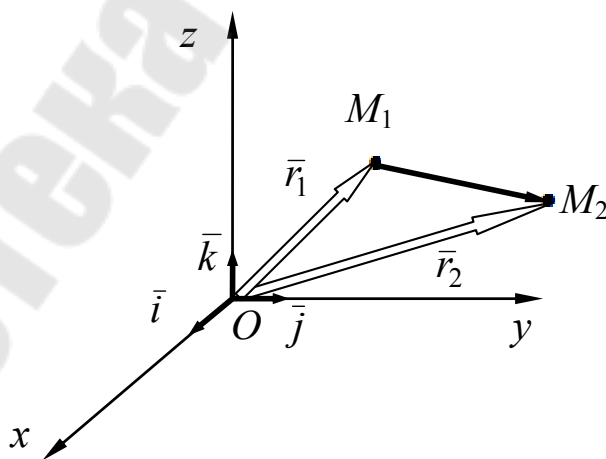


Рис. 4.2. Определение расстояния между точками  $M_1$  и  $M_2$

В качестве еще одного примера использования методов векторной алгебры рассмотрим задачу о делении отрезка в заданном отношении.

**Пример 4.1.1.** Найти координаты точки  $C$ , делящей отрезок  $[AB]$  на два отрезка  $[AC]$  и  $[CB]$ , длины которых относятся друг к другу как  $m : n$ .

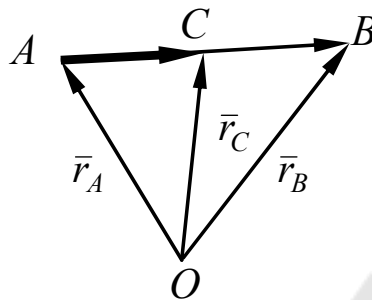


Рис. 4.3. Деление отрезка  $[AB]$  в заданном отношении

#### Решение

Зафиксируем начало координат— точку  $O$ . Далее введем радиус-векторы точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , а также векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  (рис. 4.3). Так как векторы  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  сонаправлены, то, согласно теореме (3.2.2), с учетом того, что по условию  $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{m}{n}$ , имеем:

$$\overline{AC} = \lambda \overline{AB} = \frac{m}{m+n} \overline{AB}.$$

С другой стороны:

$$\overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A \quad \text{и} \quad \overline{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A.$$

Подставляя эти выражения в соотношение между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  после несложных преобразований, находим:

$$\vec{r}_C = \frac{n}{m+n} \vec{r}_A + \frac{m}{m+n} \vec{r}_B.$$

Таким образом, согласно определению (4.1.2) искомые координаты точки  $C$  вычисляются по формулам:

$$x_C = \frac{nx_A + mx_B}{m+n}, \quad y_C = \frac{ny_A + my_B}{m+n}, \quad z_C = \frac{nz_A + mz_B}{m+n}. \quad (4.1.2)$$

В частности, если точка  $C$  – середина отрезка  $[AB]$  (т. е. делит отрезок в отношении  $1 : 1$  и  $m = n = 1$ ), то

$$x_C = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_C = \frac{z_A + z_B}{2}. \quad (4.1.3)$$

■

**Пример 4.1.2.** Точки  $A(-1, 4, 2)$ ,  $B(5, -2, 3)$  и  $C(3, 2, -4)$  являются вершинами треугольника  $\triangle ABC$ . Найти угол при вершине  $A$  (рис. 4.4).

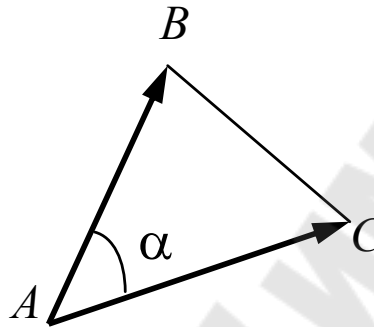


Рис. 4.4. Вычисление угла  $\alpha$  при вершине  $A$  треугольника  $\triangle ABC$  с помощью векторов-сторон

#### Решение

Угол при вершине  $A$  найдем, как угол между векторами  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ . Сначала определим координаты векторов  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$ :

$$\overline{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \{5 - (-1), -2 - 4, 3 - 2\} = \{6, -6, 1\};$$

$$\overline{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \{3 - (-1), 2 - 4, -4 - 2\} = \{4, -2, -6\}.$$

Далее найдем модули векторов и их скалярное произведение:

$$|\overline{AB}| = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 1^2} = \sqrt{73};$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{56};$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \cdot 4 + (-6) \cdot (-2) + 1 \cdot (-6) = 30.$$

Затем по формуле (3.5.5) вычислим косинус угла  $\alpha$  (рис. 4.4):

$$\cos \alpha = \frac{30}{\sqrt{73} \sqrt{56}} = \frac{15}{\sqrt{1022}} \approx 0,4692.$$

Так как косинус угла положителен, то угол при вершине  $A$  – острый и равен  $\alpha = \arccos(0,4692) \approx 62^\circ$ .

Ответ:  $62^\circ$ . ■

## 4.2. Прямая на плоскости

В аналитической геометрии задание прямой  $l$  на плоскости связано с поиском соотношения, которому должны удовлетворять координаты точек прямой  $l$  в фиксированной системе координат, и, что очень важно, не должны удовлетворять координаты ни одной точки, не лежащей на прямой. Для случая плоскости имеется достаточно много различных типов таких соотношений. Рассмотрим важнейшие из них.

Любой ненулевой вектор  $\bar{a}$  на плоскости задает класс прямых, ему параллельных. При этом вектор  $\bar{a}$  называется **направляющим вектором** прямых. Чтобы выделить прямую  $l$  из класса, необходимо дополнительно задать точку  $M_0$ , через которую эта прямая проходит. Действительно, согласно одной из аксиом евклидовой геометрии, *через фиксированную точку пространства проходит единственная прямая, параллельная заданной прямой*.

Далее возьмем на прямой  $l$  произвольную точку  $M$  и зафиксируем начало системы координат  $O$ . Введем радиус-векторы  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}$  точек  $M_0$  и  $M$  соответственно (рис. 4.5). Тогда вектор  $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$  будет коллинеарен направляющему вектору  $\bar{a}$ :

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \parallel \bar{a},$$

а уравнения прямой  $l$  будут представлять собой векторные или координатные соотношения, являющиеся простыми следствиями различных форм записи условия коллинеарности векторов.

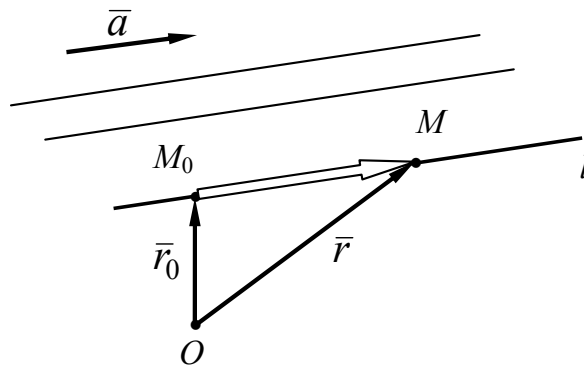


Рис. 4.5. Направляющий вектор  $\bar{a}$  задает класс параллельных прямых

**Уравнения прямой на плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , с направляющим вектором  $\bar{a} = \{l, m\}$ :**

1. *Векторное параметрическое уравнение:*

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t, \quad (4.2.1)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ . Уравнение (4.2.1) является преобразованной формой записи соотношения (3.2.3).

2. *Параметрические уравнения:*

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ . Параметрические уравнения являются координатной формой записи векторного уравнения (4.2.1).

3. *Каноническое уравнение:*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (4.2.3)$$

Уравнение (4.2.3) представляет собой условие коллинеарности в координатной форме (3.3.6) применительно к случаю векторов на плоскости.

4. *Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1)$  и  $M_2(x_2, y_2)$ :*

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (4.2.4)$$

Уравнение (4.2.4) следует из канонического уравнения (4.2.3), если заметить, что в качестве направляющего вектора  $\bar{a}$  можно выбрать вектор  $\overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$ .

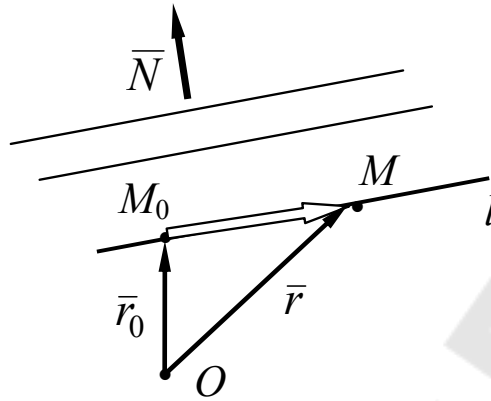


Рис. 4.6. Вектор нормали  $\bar{N}$  задает на плоскости класс параллельных прямых

На плоскости имеется другая возможность задания класса параллельных прямых, связанная с указанием вектора нормали  $\bar{N}$ . Как и в случае с направляющим вектором для выделения прямой  $l$  из класса, достаточно зафиксировать точку  $M_0$ , через которую прямая проходит (рис. 4.6). Согласно одному из свойств евклидовой геометрии, *через фиксированную точку пространства проходит единственная прямая перпендикулярная заданной прямой*. Теперь вектор  $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$  будет перпендикулярен вектору нормали  $\bar{N}$ :

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \perp \bar{N},$$

а уравнения прямой  $l$  будут получаться после несложных преобразований как следствия условия перпендикулярности векторов, записанного в векторной или координатной форме.

**Уравнения прямой на плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$  перпендикулярно вектору  $\bar{N} = \{A, B\}$ :**

1. Векторное нормальное уравнение:

$$\bar{N}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0, \quad (4.2.5)$$

Уравнение (4.2.5) является частной формой записи условия перпендикулярности векторов (3.5.6). В координатной форме оно имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4.2.6)$$

Именно в такой форме изначально записывается уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$ , перпендикулярно вектору  $\bar{N} = \{A, B\}$ .

2. Общее уравнение прямой на плоскости:

$$Ax + By + C = 0. \quad (4.2.7)$$

Уравнение (4.2.7) получается из уравнения (4.2.6) после раскрытия скобок и переобозначения постоянного выражения на константу  $C$ .

Рассмотренные два типа уравнений прямой на плоскости являются основными, так как их вывод основан на свойствах параллельных прямых в планиметрии. Тем не менее при решении специальных задач удобны и другие формы уравнений. Так, например, при анализе различного рода линейных зависимостей, графическим изображением которых являются прямые линии, первостепенное значение имеет определение скорости роста или падения. Эти характеристики связаны с углом наклона прямой в фиксированной системе декартовых координат, который по определению отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки, и принимающим значения от  $0$  до  $180^\circ$ .

*Определение 4.2.1*

Угловым коэффициентом  $k$  прямой  $l$  называется тангенс ее угла наклона:

$$k = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4.2.8)$$

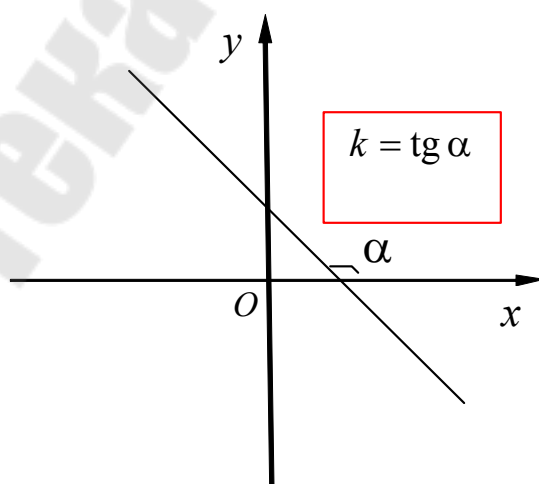


Рис. 4.7. Угловой коэффициент прямой на плоскости

Следует отметить, что не любая прямая на плоскости имеет угловой коэффициент (рис. 4.7). Действительно, вертикальные прямые угловым коэффициентом не обладают, так как угол их наклона равен  $90^\circ$ , а тангенс угла приближающегося к  $90^\circ$  неограниченно возрастает, при этом  $k \rightarrow \infty$ .

Существует прямая связь между угловым коэффициентом прямой  $k$  и декартовыми координатами ее направляющего вектора  $\bar{a}$ .

### Теорема 4.2.1

Пусть в некоторой декартовой системе координат  $\mathcal{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$  прямая  $l \nparallel Oу$  и  $\bar{a} = \{l, m\}$  – ее направляющий вектор. Тогда угловой коэффициент прямой  $k$  вычисляется по формуле

$$k = \frac{m}{l}. \quad (4.2.9)$$

Для доказательства теоремы необходимо рассмотреть все возможные случаи расположения прямой  $l$  и ее направляющего вектора  $\bar{a}$  относительно оси  $Ox$  (с учетом геометрического смысла декартовых координат как проекций вектора на координатные оси).

Соотношение (4.2.9) позволяет из канонического уравнения (4.2.3) моментально получить *уравнение прямой с угловым коэффициентом  $k$ , проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0)$* :

$$y = k(x - x_0) + y_0. \quad (4.2.10)$$

### Основные типы задач на взаимное расположение точек и прямых на плоскости

#### *Задача 1. Угол между двумя прямыми*

Угол между двумя прямыми на плоскости определяется как угол между их направляющими или нормальными векторами. При этом следует заметить, что в отличие от векторов прямые не имеют выделенного направления. Поэтому в качестве угла  $\varphi$  между прямыми выбирается острый угол, косинус которого положителен, и имеет место соотношение

$$\cos \varphi = |\cos \alpha|, \quad (4.2.11)$$

где  $\alpha$  – угол между направляющими или нормальными векторами.

**Пример 4.2.1.** Найти угол между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , заданными общими уравнениями:

$$2x - 5y + 3 = 0 \text{ и } 3x + 2y - 4 = 0.$$

*Решение*

По виду общих уравнений определяем декартовы координаты векторов нормали:

$$\bar{N}_1 = \{2, -5\} \text{ и } \bar{N}_2 = \{3, 2\}.$$

Тогда с учетом соотношения (4.2.11) находим:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-5) \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2} \sqrt{3^2 + 2^2}} = \frac{|-4|}{\sqrt{29} \sqrt{13}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{277}} \approx 0,2403 \Rightarrow \varphi \approx 76,1^\circ. \end{aligned}$$

*Ответ:*  $\varphi \approx 76,1^\circ$ . ■

В случае, когда прямые  $l_1$  и  $l_2$ , заданы уравнениями с угловыми коэффициентами  $k_1$  и  $k_2$  типа (4.2.10), угол между прямыми определяется через углы их наклона:  $\varphi = |\alpha_1 - \alpha_2|$ . При этом

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|. \quad (4.2.12)$$

**Пример 4.2.2.** Найти угол между прямыми  $l_1$  и  $l_2$ , заданными уравнениями:

$$y = 3x + 4 \text{ и } y = 5x - 6.$$

*Решение*

Уравнения имеют вид (4.2.10). По виду уравнений определяем угловые коэффициенты прямых:  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = 5$ .

Далее по формуле (4.2.12) последовательно находим:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{3 - 5}{1 + 3 \cdot 5} \right| = \frac{1}{8} \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{8} \approx 7,1^\circ.$$

*Ответ:*  $7,1^\circ$ . ■

Следствием формулы (4.2.12) является условие перпендикулярности прямых  $l_1$  и  $l_2$ , записанное в виде соотношения между угловыми коэффициентами:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1. \quad (4.2.13)$$

**Пример 4.2.3.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $A(-3, 4)$  перпендикулярно прямой  $y = -2x + 7$ .

*Решение*

Угловым коэффициентом заданной прямой равен:  $k_0 = -2$ . Угловым коэффициентом искомой прямой  $k$  определяем из соотношения (4.2.13):

$$k_0 \cdot k = -1 \Rightarrow (-2) \cdot k = -1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Подставляя в уравнение (4.2.10) координаты точки  $A$  и найденное значение углового коэффициента  $k$ , находим:

$$y = \frac{1}{2}(x + 3) + 4 \Rightarrow y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}.$$

*Ответ:*  $y = \frac{1}{2}x + \frac{11}{2}$ . ■

### **Задача 2. Расстояние между точкой и прямой**

Расстояние  $d$  от точки  $M(x_1, y_1)$  до прямой  $l$  можно найти как модуль проекции вектора  $\overline{M_0M}$ , где  $M_0(x_0, y_0)$  – точка, лежащая на прямой, на нормаль к прямой, задаваемую любым перпендикулярным к  $l$  вектором  $\overline{N} = \{A, B\}$  (рис. 4.8).

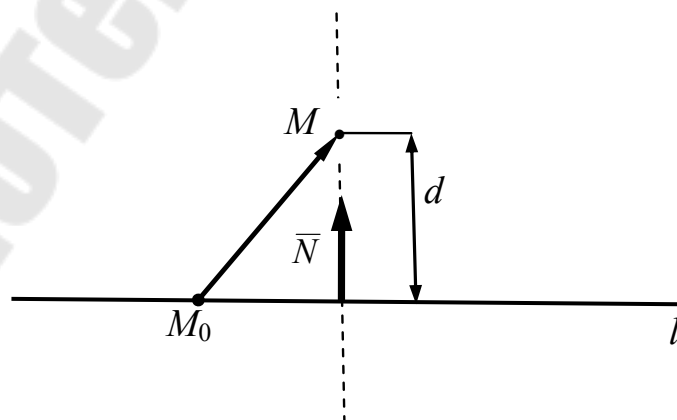


Рис. 4.8. Расстояние между точкой  $M$  и прямой  $l$

В случае, если прямая задана общим уравнением (4.2.7), то имеет место формула

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.2.14)$$

**Пример 4.2.4.** Точки  $A(3, -2)$ ,  $B(-2, 1)$  и  $C(-1, 5)$  являются вершинами треугольника. Найти высоту, опущенную из вершины  $B$  на противоположную сторону  $AC$ .

*Решение*

Составим уравнение прямой  $l$ , проходящей через сторону  $AC$ , используя соотношение (4.2.7) и взяв в качестве точек  $M_1$  и  $M_2$  точки  $A$  и  $C$  соответственно:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y-(-2)}{5-(-2)} \Rightarrow \frac{x-3}{-4} = \frac{y+2}{7} \Rightarrow 7x+4y-13=0.$$

Тогда искомая высота  $h_B$  будет равна расстоянию от точки  $B$  до прямой  $l$ . По формуле (4.2.14) находим:

$$h_B = \frac{|7 \cdot (-2) + 4 \cdot 1 - 13|}{\sqrt{7^2 + 4^2}} = \frac{|-23|}{\sqrt{49 + 16}} = \frac{23}{\sqrt{65}} \approx 2,85.$$

*Ответ:* 2,85. ■

### **Задача 3. Расстояние между параллельными прямыми**

Задачу определения расстояния между двумя параллельными прямыми можно свести к предыдущей задаче, если зафиксировать какую-либо точку на одной из прямых. Тем не менее, если параллельные прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими общими уравнениями:

$$Ax + By + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad Ax + By + C_2 = 0,$$

то расстояние между ними можно найти по формуле

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (4.2.15)$$

## Лекция 9

### 4.3. Плоскость в пространстве

Любой ненулевой вектор  $\bar{N}_B$  в пространстве задает класс параллельных плоскостей, ему перпендикулярных. Чтобы выделить плоскость из класса, необходимо указать точку  $M_0$ , через которую плоскость проходит (рис. 4.9). Действительно, согласно одной из теорем стереометрии *через точку проходит единственная плоскость перпендикулярная данной прямой*. Вектор  $\bar{N}$  называется **нормальным вектором плоскости** или просто **вектором нормали**.

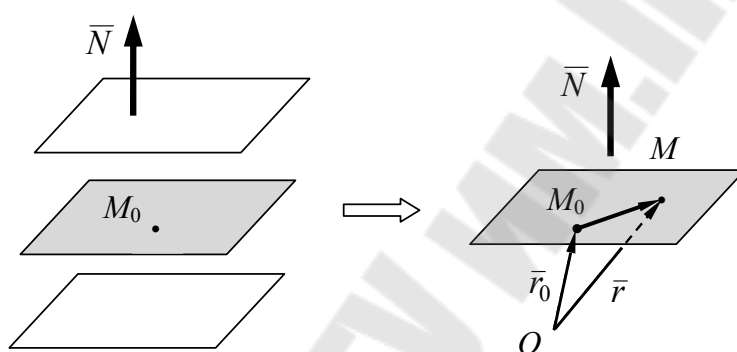


Рис. 4.9. Вектор нормали  $\bar{N}$  задает в пространстве класс параллельных плоскостей. Точка  $M_0$  выделяет плоскость из класса

Возьмем на плоскости произвольную точку  $M$  и зафиксируем начало системы координат  $O$ . Далее введем радиус-векторы  $\bar{r}_0$  и  $\bar{r}$  точек  $M_0$  и  $M$  соответственно. Тогда вектор  $\overline{M_0M} = \bar{r} - \bar{r}_0$  будет перпендикулярен вектору нормали  $\bar{N}$ :

$$\bar{r} - \bar{r}_0 \perp \bar{N},$$

а уравнение плоскости будет представлять собой условие перпендикулярности векторов, записанное в векторной или координатной форме.

**Уравнения плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , перпендикулярно вектору  $\bar{N} = \{A, B, C\}$ :**

1. **Векторное нормальное уравнение:**

$$\bar{N}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0. \quad (4.3.1)$$

Уравнение (4.3.1) является частной формой записи условия перпендикулярности векторов (3.5.6). В координатной форме оно имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (4.3.2)$$

Именно в этой форме изначально записывается уравнение плоскости, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , перпендикулярно вектору  $\bar{N} = \{A, B, C\}$ .

## 2. Общее уравнение плоскости:

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (4.3.3)$$

Уравнение (4.3.3) получается из уравнения (4.3.2) после раскрытия скобок и переобозначения постоянного выражения на константу  $D$ .

## Основные типы задач на взаимное расположение точек и плоскостей

### Задача 1. Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Пусть в некоторой декартовой системе координат с началом в точке  $O$  заданы три точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ . В евклидовой геометрии через три точки проходит единственная плоскость. Необходимо составить ее уравнение.

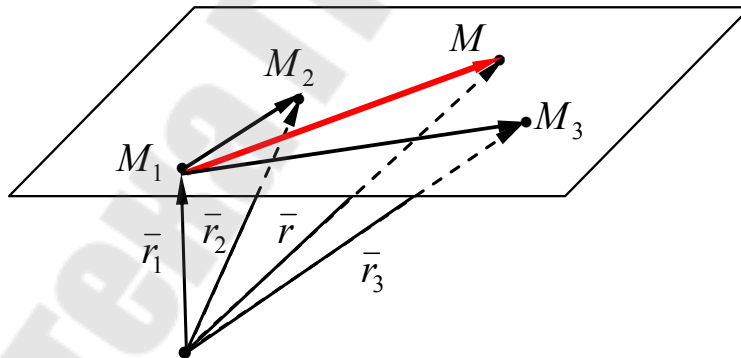


Рис. 4.10. Плоскость, проходящая через три точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$

Возьмем в плоскости произвольную точку  $M$  и рассмотрим три вектора (рис. 4.10):

$$\overline{M_1M} = \bar{r} - \bar{r}_1, \quad \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \quad \overline{M_1M_3} = \bar{r}_3 - \bar{r}_1.$$

Тогда эти векторы компланарны. Причем, если точка  $M$  лежит вне плоскости, то отношение компланарности исчезает. Таким образом, уравнение плоскости будет записываться как условие компланарности наших векторов:

– в векторной форме:

$$(\vec{r} - \vec{r}_1)(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{r}_3 - \vec{r}_1) = 0; \quad (4.3.4)$$

– в координатной форме:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.3.5)$$

После вычисления определителя, например, путем разложения его по первой строке, и элементарных преобразований уравнение (4.3.5) приводится к виду общего уравнения (4.3.3).

### **Задача 2. Расстояние от точки до плоскости**

Расстояние  $d$  от точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  до плоскости  $\pi$  определяется как длина перпендикуляра  $M_1M'_1$ , опущенного из точки  $M_1$  на плоскость (точка  $M'_1$  – основание перпендикуляра). Его можно вычислить как модуль проекции вектора  $\overline{M_0M_1}$ , где  $M_0$  – любая точка, лежащая в плоскости, на прямую с направляющим вектором, совпадающим с вектором нормали плоскости  $\vec{N}$  (рис. 4.11).

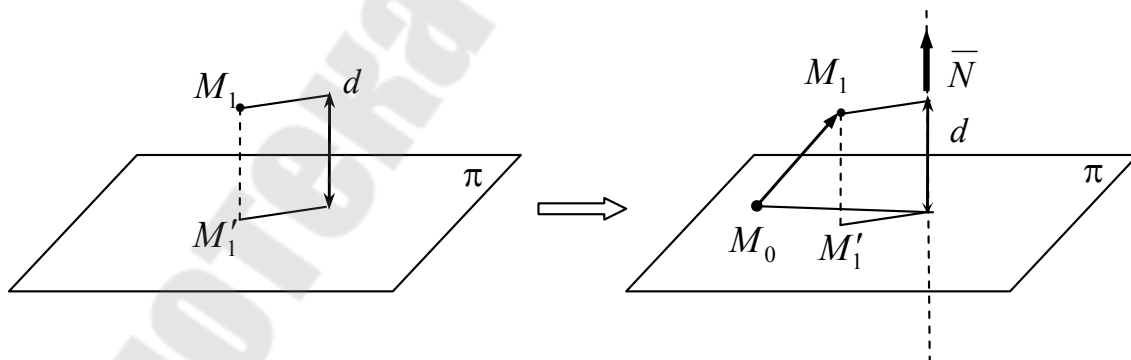


Рис. 4.11. Определение расстояния от точки  $M_1$  до плоскости, как модуль проекции вектора  $\overline{M_0M_1}$  на прямую с направляющим вектором  $\vec{N}$

В случае, если плоскость задана общим уравнением (4.3.3), то имеет место формула

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (4.3.6)$$

**Пример 4.3.1.** Вершины треугольной пирамиды расположены в точках  $A(3, -2, 2)$ ,  $B(-1, 1, -3)$ ,  $C(1, -4, 2)$  и  $D(2, 3, 5)$ . Найти длину высоты пирамиды, опущенной из точки  $D$  на противоположную грань.

*Решение*

Искомую высоту найдем как расстояние от точки  $D$  до плоскости, содержащей противоположную грань  $ABC$  (рис. 4.12). Для определения уравнения плоскости грани воспользуемся уравнением (4.3.5). Выберем в качестве первой точки – точку  $A$ . Далее предварительно определим координаты векторов  $\overline{AM}$ ,  $\overline{AB}$  и  $\overline{AC}$  ( $M(x, y, z)$  – произвольная точка плоскости):

$$\overline{AM} = \{x - 3, y + 2, z - 2\};$$

$$\overline{AB} = \{-1 - 3, 1 + 2, -3 - 2\} = \{-4, 3, -5\};$$

$$\overline{AC} = \{1 - 3, -4 + 2, 2 - 2\} = \{-2, -2, 0\}.$$

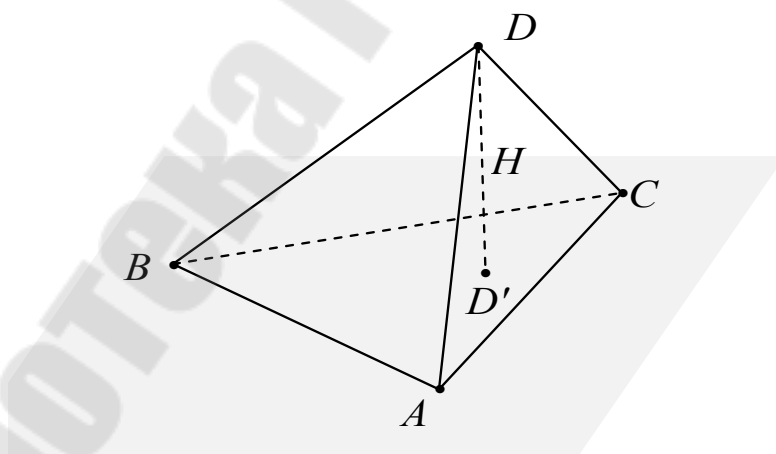


Рис. 4.12. Пирамида с вершиной  $D$  и треугольным основанием  $ABC$

Составим из координат векторов определитель и приравняем его к нулю. После вычисления определителя получаем уравнение плоскости в общем виде:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z-2 \\ -4 & 3 & -5 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 5y - 7z - 11 = 0.$$

Высоту  $H$  вычисляем по формуле (4.3.6):

$$H = \frac{|5 \cdot 2 + (-5) \cdot 3 + (-7) \cdot 5 - 11|}{\sqrt{5^2 + (-5)^2 + (-7)^2}} = \frac{|-51|}{\sqrt{25 + 25 + 49}} = \frac{17}{\sqrt{11}} \approx 5,13.$$

Ответ:  $H \approx 5,13$ . ■

### Задача 3. Расстояние между двумя параллельными плоскостями

Определение расстояния между двумя параллельными плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$  можно свести к предыдущей задаче, если в одной из плоскостей зафиксировать точку (рис. 4.13).

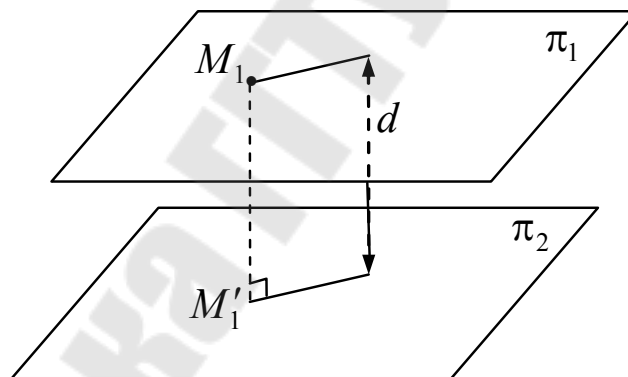


Рис. 4.13. Расстояние  $d$  между параллельными плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$  равно длине перпендикуляра, опущенного из точки  $M_1$  плоскости  $\pi_1$  на плоскость  $\pi_2$

В случае, если плоскости заданы общими уравнениями:

$$\pi_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0;$$

$$\pi_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

то искомое расстояние  $d$  можно вычислить по следующей формуле:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (4.3.7)$$

являющейся следствием формулы (4.3.6).

#### **Задача 4. Угол между плоскостями**

Изначально угол между плоскостями  $\varphi$  определяется как линейный угол, образованный линиями пересечения плоскостей третьей плоскостью им перпендикулярной, или, что равносильно, перпендикулярной их общей прямой  $l$ . Существует и другая возможность определения угла между плоскостями, связанная с использованием угла между их векторами нормали  $\alpha$  (рис. 4.14).

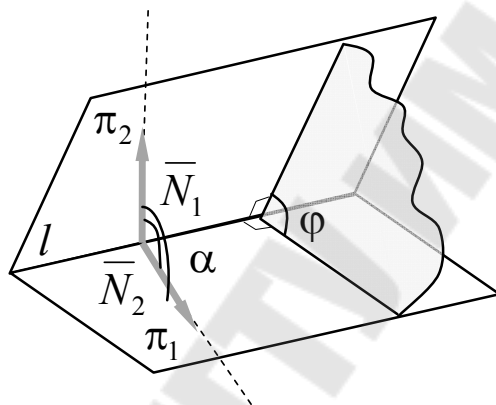


Рис. 4.14. Определение угла между двумя плоскостями

Однако угол между *неупорядоченной* парой векторов может принимать любые значения от  $0$  до  $180^\circ$ , в то время как угол между плоскостями (если не различать стороны плоскостей) – всегда острый:  $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ . С учетом этого замечания угол между плоскостями  $\varphi$  находится из равенства

$$\cos \varphi = |\cos \alpha| = \frac{|\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2|}{|\bar{N}_1| |\bar{N}_2|}. \quad (4.3.8)$$

Задача определения угла между гранями многогранника, например, пирамиды, отличается от разобранных выше тем, что требует определенного согласования направлений векторов нормали граней. Дело в том, что угол между гранями есть двугранный угол, который образован полуплоскостями, а не плоскостями. Двугранный угол разбивает пространство на два подпространства, а пересекающиеся плос-

кости – на четыре. Согласование можно провести по следующему правилу: *после помещения векторов нормали в середины граней один из них должен быть направлен внутрь многогранника, а второй – во внешнее пространство.*

**Пример 4.3.2.** Найти угол между гранями  $ACD$  и  $B CD$  треугольной пирамиды из примера 4.3.1.

*Решение*

Векторы нормалей для граней  $ACD$  и  $B CD$  определим как

$$\bar{N}_1 = \overline{CD} \times \overline{CA}, \quad \bar{N}_2 = \overline{CD} \times \overline{CB}.$$

Нетрудно проверить, например, с помощью правила правой руки, что вектор  $\bar{N}_1$  направлен во внешнее пространство пирамиды, а вектор  $\bar{N}_2$  – во внутреннее (рис. 4.15). Используя условие примера 4.3.1, найдем координаты векторов-ребер:

$$\overline{CA} = \{2, 2, 0\}; \quad \overline{CB} = \{-2, 5, -5\}; \quad \overline{CD} = \{1, 7, 3\}.$$

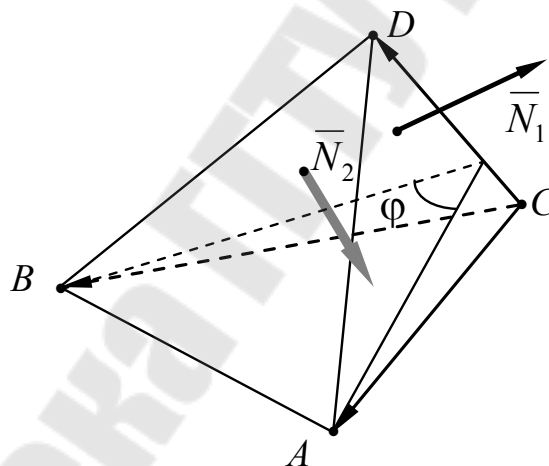


Рис. 4.15. Угол между гранями  $ACD$  и  $B CD$  треугольной пирамиды.  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$  – векторы нормалей граней с согласованными направлениями

Далее определяем координаты векторов нормалей  $\bar{N}_1$  и  $\bar{N}_2$ :

$$\bar{N}_1 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -6\bar{i} + 6\bar{j} - 12\bar{k} \Rightarrow \bar{N}_1 = \{-6, 6, -12\};$$

$$\bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 7 & 3 \\ -2 & 5 & -5 \end{vmatrix} = -50\bar{i} - \bar{j} + 19\bar{k} \Rightarrow \bar{N}_1 = \{-50, -1, 19\}.$$

Наконец, находим искомый угол  $\varphi$  как угол между векторами нормалей:

$$\cos \varphi = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| |\bar{N}_2|} = \frac{(-6) \cdot (-50) + 6 \cdot (-1) + (-12) \cdot 19}{\sqrt{36 + 36 + 144} \sqrt{2500 + 1 + 361}} = \frac{11}{18\sqrt{53}};$$

$$\varphi = \arccos 0,0839 \approx 85,2^\circ.$$

Ответ:  $\varphi \approx 85,2^\circ$ . ■

#### 4.4. Прямая и плоскость в пространстве

Класс параллельных прямых в трехмерном пространстве (в отличие от плоскости) можно задать *только одним способом* – с помощью направляющего вектора  $\bar{a}$ . Поэтому уравнения прямой в пространстве являются трехмерными обобщениями уравнений (4.2.4)–(4.2.7).

Пусть  $\bar{a} = \{l, m, n\}$  – направляющий вектор прямой  $l$ , заданный своими координатами в некоторой декартовой системе координат, а  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  – фиксированная точка с радиус-вектором  $\bar{r}_0$ , через которую прямая  $l$  проходит. Тогда прямая  $l$  может быть задана уравнениями в одной из следующих форм.

**Уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку  $M_0(x_0, y_0, z_0)$ , с направляющим вектором  $\bar{a} = \{l, m, n\}$ :**

1. Векторное параметрическое уравнение:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t, \quad (4.4.1)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ .

2. Система параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (4.4.2)$$

где  $t \in \mathbb{R}$ .

3. Каноническое уравнение:

$$\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}. \quad (4.4.3)$$

4. Уравнение прямой, проходящей через две точки  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  и  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ :

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \quad (4.4.4)$$

Все формы уравнений эквивалентны, и легко могут быть преобразованы друг в друга.

### Основные типы задач на взаимное расположение точек, прямых и плоскостей в пространстве

*Задача 1. Параллельные, пересекающиеся и скрещивающиеся прямые*

Пусть прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями в некоторой декартовой системе координат:

$$\frac{x-x_1}{l_1} = \frac{y-y_1}{m_1} = \frac{z-z_1}{n_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{l_2} = \frac{y-y_2}{m_2} = \frac{z-z_2}{n_2}.$$

В пространстве имеются три возможных относительных расположения двух прямых:

- прямые могут быть *параллельными*;
- прямые могут *пересекаться*;
- прямые могут *скрещиваться*.

#### 1. Параллельные прямые в пространстве

*Критерий параллельности прямых* равносителен условию коллинеарности их направляющих векторов  $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ :

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (4.4.5)$$

Однако при этом прямые могут совпадать. Для разделения прямых  $l_1$  и  $l_2$  необходимо дополнительно потребовать, чтобы вектор  $\overline{M_1M_2}$  не был коллинеарным с направляющими векторами:  $\overline{M_1M_2} \nparallel \vec{a}_1, \vec{a}_2$ .

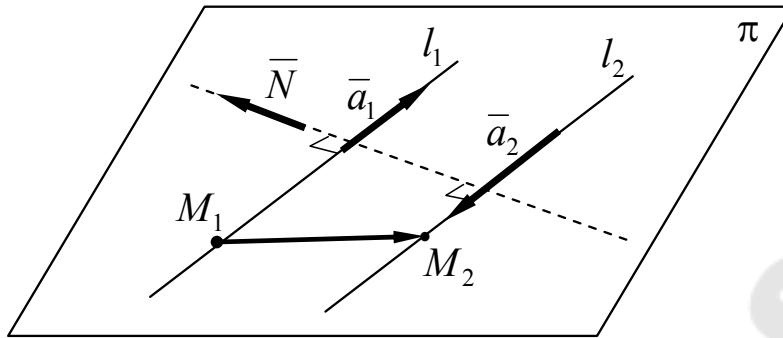


Рис. 4.16. Параллельные прямые в пространстве

Расстояние между параллельными прямыми в пространстве может быть вычислено как абсолютное значение проекции вектора  $\overline{M_1M_2}$  на ось, задаваемую вектором нормали прямых  $\overline{N}$ , лежащим в их плоскости  $\pi$  (рис. 4.16). В качестве вектора  $\overline{N}$  можно взять, например, следующий вектор:

$$\overline{N} = \overline{a_1} \times [\overline{a_1} \times \overline{M_1M_2}]. \quad (4.4.6)$$

**Пример 4.4.1.** Установить, при каких значениях параметров  $\alpha$  и  $\beta$  прямые  $l_1$  и  $l_2$ , заданные каноническими уравнениями

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{\alpha} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{\beta} = \frac{z+2}{-2},$$

параллельны. В случае существования таких параметров найти расстояние между прямыми.

*Решение*

Из заданных уравнений выписываем координаты направляющих векторов и точек, через которые прямые проходят:

$$\begin{aligned} \overline{a_1} &= \{3, 6, \alpha\}, & M_1 &(3, -1, 3); \\ \overline{a_2} &= \{2, \beta, -2\}, & M_2 &(-1, 3, -2). \end{aligned}$$

Далее, используя условие коллинеарности векторов  $\overline{a_1}$  и  $\overline{a_2}$  (4.4.5), вычисляем значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых прямые  $l_1$  и  $l_2$  параллельны:

$$\frac{3}{2} = \frac{6}{\beta} = \frac{\alpha}{-2} \Rightarrow \beta = \frac{2 \cdot 6}{3} = 4, \quad \alpha = \frac{3 \cdot (-2)}{2} = -3.$$

Для определения расстояния между прямыми  $d$  предварительно найдем координаты вектора нормали  $\bar{N}$  (4.4.6), лежащего в плоскости прямых:

$$\begin{aligned}\bar{a}_1 &= \{3, 6, -3\}, \quad \overline{M_1M_2} = \{-1-3, 3-(-1), -2-3\} = \{-4, 4, -5\}; \\ \bar{N} &= \bar{a}_1 \times [\bar{a}_1 \times \overline{M_1M_2}] = \bar{a}_1(\bar{a}_1 \cdot \overline{M_1M_2}) - \overline{M_1M_2}(\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1) = \\ &= (3\bar{i} + 6\bar{j} - 3\bar{k})(3 \cdot (-4) + 6 \cdot 4 + (-3) \cdot (-5)) - \\ &- (-4\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k})(3^2 + 6^2 + (-3)^2) = 27(11\bar{i} - 2\bar{j} + 7\bar{k}).\end{aligned}$$

Здесь использовалась формула для двойного векторного произведения:

$$\bar{a} \times [\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}). \quad (4.4.7)$$

Наконец, расстояние  $d$  находим как модуль проекции вектора  $\overline{M_1M_2}$  на ось, задаваемую вектором  $\bar{N}$ :

$$\begin{aligned}d &= \left| \text{пр}_{\bar{N}} \overline{M_1M_2} \right| = \frac{|\bar{N} \cdot \overline{M_1M_2}|}{|\bar{N}|} = \\ &= \frac{27|11 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 + 7 \cdot (-5)|}{27\sqrt{11^2 + (-2)^2 + 7^2}} = \frac{\sqrt{174}}{2} \approx 6,60.\end{aligned}$$

Ответ:  $\alpha = -3, \beta = 4; d \approx 6,60.$  ■

## 2. Пересекающиеся прямые в пространстве

Характерным свойством пересекающихся прямых в пространстве является существование определенной плоскости, в которой они лежат. Поэтому *условие пересечения прямых* связано с условием копланарности трех векторов —  $\overline{M_1M_2}$ ,  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$  (рис. 4.17), которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4.4.8)$$

Следует отметить, что параллельные прямые также лежат в одной плоскости и удовлетворяют соотношению (4.4.8). Для разделения двух случаев, а именно, пересечения и параллельности, необходимо дополнительно потребовать, чтобы направляющие векторы прямых были неколлинеарными:  $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$ .

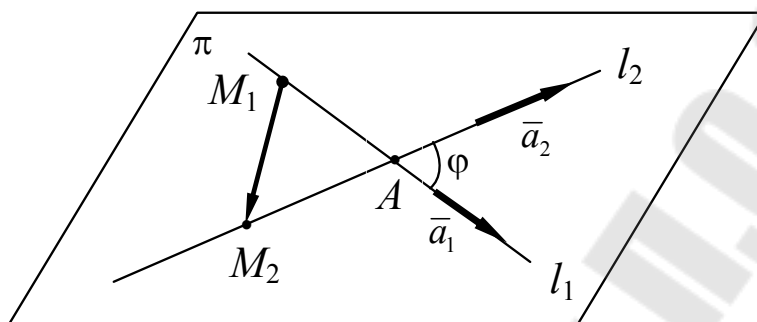


Рис. 4.17. Пересекающиеся прямые в пространстве

**Пример 4.4.2.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-2}{1} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}.$$

Установить пересекаются ли прямые. В случае пересечения найти:

- угол между прямыми  $\varphi$ ;
- координаты точки пересечения  $A$ .

*Решение*

Согласно условию выписываем координаты направляющих векторов и точек, лежащих на прямых:

$$\bar{a}_1 = \{2, -3, 1\}, \quad M_1(-1, 1, 2);$$

$$\bar{a}_2 = \{3, -1, 2\}, \quad M_2(-2, -1, 1).$$

Сразу отметим, что прямые не параллельны, так как координаты их направляющих векторов не пропорциональны, а значит,  $\bar{a}_1 \nparallel \bar{a}_2$ .

Далее проверим выполнение условия пересечения прямых (4.4.8):

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (2' = 2 - 3) = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

При вычислении определителя мы от второй строки отняли третью, и получили определитель с двумя совпадающими строками, который равен нулю. Таким образом, условие (4.4.8) выполняется и *прямые пересекаются*.

Для задания а): угол между прямыми  $\varphi$  найдем с помощью угла между их направляющими векторами  $\alpha$ :

$$\cos \varphi = |\cos \alpha| = \frac{|\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2|}{|\bar{a}_1| |\bar{a}_2|} = \frac{|2 \cdot 3 + (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 2|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 1^2} \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{11}{14} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{11}{14} \approx 38,2^\circ.$$

Для задания б): для определения координат точки пересечения  $A$  запишем уравнение какой-нибудь из прямых, например,  $l_1$ , в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 1 - 3t, \\ z = 2 + t. \end{cases}$$

Параметр  $t_A$ , соответствующий точке  $A$ , найдем, подставив эти соотношения в левое равенство уравнения прямой  $l_2$  (точка  $A$  – общая точка прямых!):

$$\frac{(-1 + 2t_A) + 2}{3} = \frac{(1 - 3t_A) + 1}{-1} \Rightarrow -1 \cdot (1 + 2t_A) = 3 \cdot (2 - 3t_A) \Rightarrow t_A = 1.$$

Таким образом, координаты точки  $A$  равны:

$$x_A = -1 + 2 \cdot 1 = 1, \quad y_A = 1 - 3 \cdot 1 = -2, \quad z_A = 2 + 1 = 3.$$

Ответ: а)  $\varphi \approx 38,2^\circ$ ; б)  $A(1, -2, 3)$ . ■

### 3. Скрещивающиеся прямые в пространстве

Критерием скрещивания двух прямых в пространстве является нарушение условия их пересечения (4.4.8). В евклидовой геометрии через любые скрещивающиеся прямые проходят параллельные плоскости. Нормальный вектор плоскостей  $\bar{N}$  определяется как векторное произведение направляющих векторов прямых:

$$\bar{N} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2. \quad (4.4.9)$$

Расстояние между прямыми  $d$  можно найти как модуль проекции вектора  $\overline{M_1M_2}$  на ось, задаваемую вектором  $\overline{N}$  (рис. 4.18):

$$d = \left| \text{пр}_{\overline{N}} \overline{M_1M_2} \right|. \quad (4.4.10)$$

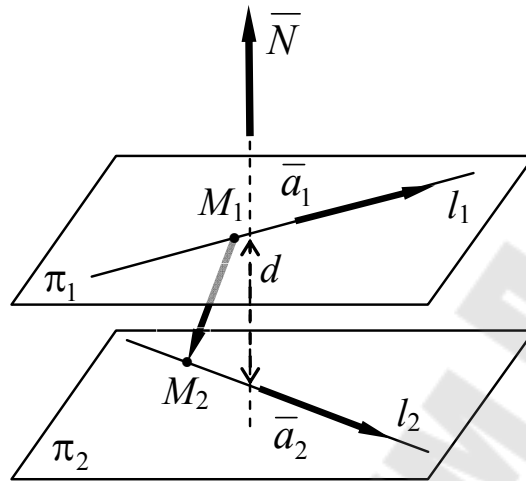


Рис. 4.18. Скрещивающиеся прямые в пространстве

Однако возможны и другие способы определения  $d$ :

- расстояние от точки  $M_1$  до плоскости  $\pi_2$ ;
- расстояние между параллельными плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$ ;
- и т. п.

**Пример 4.4.3.** Прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы своими каноническими уравнениями:

$$l_1: \frac{x-3}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-4}{3} \quad \text{и} \quad l_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-3}{-2}.$$

Установить, являются ли прямые скрещивающимися. В случае скрещивания найти: а) уравнения параллельных плоскостей, содержащих прямые; б) расстояние между прямыми.

*Решение*

Выпишем координаты направляющих векторов и точек, лежащих на прямых:

$$\begin{aligned} l_1: \overline{a_1} &= \{-1, 2, 3\}, & M_1 &= (3, -1, 4); \\ l_2: \overline{a_2} &= \{2, 1, -2\}, & M_2 &= (1, -2, 3). \end{aligned}$$

Далее проверим выполнение соотношения (4.4.8):

$$\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 8 - 6 + 1 - (-4 - 2 - 6) = 3 - (-12) = 15 \neq 0.$$

Соотношение (4.4.8) не выполняется, значит, *прямые*  $l_1$  и  $l_2$  *скрещиваются*.

Для задания а): по формуле (4.4.9) определим координаты вектора нормали плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , содержащих прямые:

$$\bar{N} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-4 - 3)\bar{i} - (2 - 6)\bar{j} + (-1 - 4)\bar{k} = -7\bar{i} + 4\bar{j} - 5\bar{k}.$$

Затем записываем уравнения плоскостей в форме (4.3.2), и после алгебраических преобразований приводим их к общему виду:

$$\pi_1: -7(x - 3) + 4(y - 1) - 5(z - 4) = 0 \Rightarrow -7x + 4y - 5z + 45 = 0;$$

$$\pi_2: -7(x - 1) + 4(y - 2) - 5(z - 3) = 0 \Rightarrow -7x + 4y - 5z + 30 = 0.$$

Для задания б): расстояние между скрещивающимися прямыми удобно найти как расстояние между параллельными плоскостями  $\pi_1$  и  $\pi_2$ . Воспользовавшись формулой (4.3.7), получаем:

$$d = \frac{|45 - 30|}{\sqrt{(-7)^2 + 4^2 + (-5)^2}} = \frac{15}{\sqrt{90}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1,58.$$

$$\text{Ответ: а) } \pi_1: -7x + 4y - 5z + 45 = 0;$$

$$\pi_2: -7x + 4y - 5z + 30 = 0.$$

$$\text{б) } d \approx 1,58.$$

■

### Задача 2. Прямая как линия пересечения плоскостей

Рассмотрим прямую  $l$  как линию пересечения двух не параллельных плоскостей:  $\pi_1 \nparallel \pi_2$ , заданных своими общими уравнениями:

$$\pi_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$

$$\pi_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Тогда координаты точек  $M(x, y, z)$ , лежащих на прямой, должны удовлетворять линейной системе, составленной из этих уравнений:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \quad (4.4.11)$$

Система (4.4.11) имеет ранг, равный двум, поэтому ее пространство решений однопараметрическое. По-существу, она является еще одной самостоятельной формой уравнения прямой в пространстве.

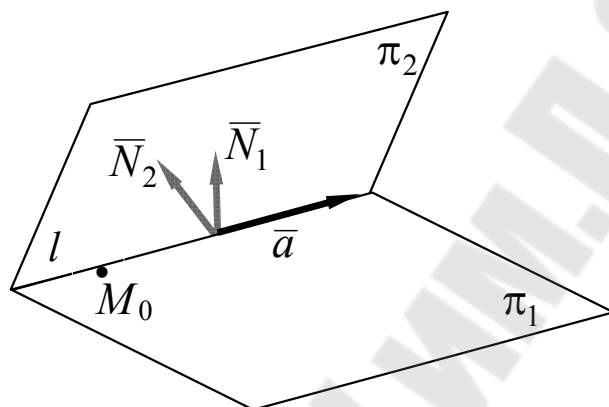


Рис. 4.19. Прямая в пространстве как линия пересечения плоскостей

Из системы (4.4.11) нетрудно получить уравнение в каноническом виде (4.4.3). Действительно, в качестве направляющего вектора прямой  $\bar{a}$  выберем следующий вектор (рис. 4.19):

$$\bar{a} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2, \quad (4.4.12)$$

где  $\bar{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$  и  $\bar{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$  – нормальные векторы плоскостей  $\pi_1$  и  $\pi_2$ , соответственно.

Координаты фиксированной точки прямой  $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$  определим как частное решение системы (4.4.11). Из соображений простоты предпочтение отдается целочисленным решениям. Другой вариант – «занулить» одну из неизвестных и решить упрощенную систему, например, с помощью правила Крамера.

**Пример 4.4.4.** Найти каноническое уравнение прямой, заданной линейной системой:

$$\begin{cases} 4x - y - 2z + 5 = 0, \\ 3x + 2y - z + 4 = 0. \end{cases}$$

### Решение

Прямая рассматривается как линия пересечения двух плоскостей. По виду уравнений выписываем координаты нормальных векторов плоскостей:

$$\bar{N}_1 = \{4, -1, -2\}; \quad \bar{N}_2 = \{3, 2, -1\}.$$

Затем по формуле (4.4.12) находим координаты направляющего вектора прямой

$$\bar{a} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\bar{i} - 2\bar{j} + 11\bar{k}.$$

Далее нетрудно проверить непосредственной подстановкой, что заданная система допускает следующее целочисленное решение:

$$x_0 = 1, \quad y_0 = -1, \quad z_0 = 5.$$

Таким образом, каноническое уравнение имеет вид:

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-5}{11}.$$

■

### Задача 3. Расстояние от точки до прямой в пространстве

Расстояние  $d$  от точки  $A$  до прямой  $l$  определяется как длина перпендикуляра  $AA'$ , опущенного из точки на прямую (рис. 4.20). Для его определения можно использовать разные способы. Например, так как в евклидовой геометрии через точку проходит единственная прямая  $l'$ , параллельная заданной прямой, то  $d$  равно расстоянию между параллельными прямыми (пример 4.4.3б)).

Другая возможность связана с использованием плоскости, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой. В качестве нормального вектора плоскости можно взять направляющий вектор прямой:  $\bar{N} = \bar{a}$ .

Пусть прямая  $l$  задана системой параметрических уравнений (4.4.2). Подставляя параметрические выражения для координат точек прямой в уравнение плоскости, находим параметр  $t_{A'}$ , соответствующий точке пересечения прямой и плоскости  $A'$ , а затем и ее координаты. Расстояние от точки  $A$  до прямой  $l$  вычисляется по формуле (4.1.1) как расстояние между точками  $A$  и  $A'$ .

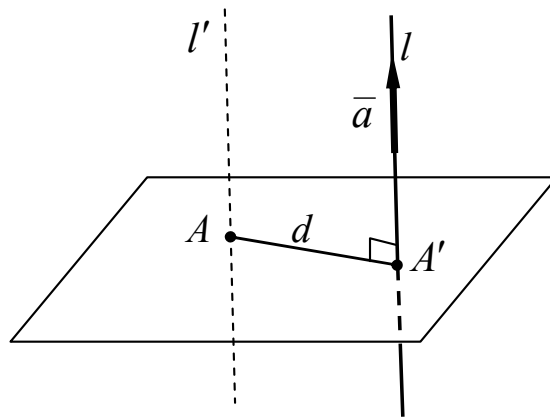


Рис. 4.20. Определение расстояния от точки  $A$  до прямой  $l$

**Пример 4.4.5.** Найти расстояние от точки  $A'(-1, 2, 5)$  до прямой  $l$ , заданной каноническим уравнением:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{4}.$$

*Решение*

Составим, используя соотношение (4.3.2), уравнение плоскости, проходящей через точку  $A$  перпендикулярно прямой  $l$ , выбрав в качестве вектора нормали  $\bar{N}$  направляющий вектор прямой  $\bar{a} = \{-3, 1, 4\}$ :

$$(-3) \cdot (x-1) + 1 \cdot (y-2) + 4 \cdot (z-5) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y - 4z + 25 = 0.$$

Запишем уравнение заданной прямой в параметрической форме, приравняв все части канонического равенства параметру  $t$ :

$$\begin{cases} x = -3t + 2, \\ y = t - 3, \\ z = 4t + 1. \end{cases}$$

Подставим эти соотношения в уравнение плоскости и определим параметр  $t$  для их общей точки  $A'$ :

$$3 \cdot (-3t + 2) - (t - 3) - 4 \cdot (4t + 1) + 25 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -26t + 30 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = t_{A'} = \frac{15}{13}.$$

Подставляя найденный параметр в параметрические равенства, находим координаты точки пересечения прямой и плоскости:

$$x_{A'} = -3\frac{15}{13} + 2 = -\frac{19}{13}; \quad y_{A'} = \frac{15}{13} - 3 = -\frac{24}{13}; \quad z_{A'} = 4\frac{15}{13} + 1 = \frac{73}{13}.$$

Расстояние  $d$  от точки  $A$  до прямой  $l$  вычисляем по формуле (4.1.1) как расстояние между точками  $A$  и  $A'$ :

$$d = \sqrt{\left(-\frac{19}{13} - (-1)\right)^2 + \left(-\frac{24}{13} - 1\right)^2 + \left(\frac{73}{13} - 5\right)^2} = \frac{10\sqrt{26}}{13} \approx 3,92.$$

Ответ:  $d \approx 3,92$ . ■

## Лекция 10

### 4.5. Классификация кривых и поверхностей

Способы задания линий и поверхностей существенно зависят от задач, в которых графические изображения и чертежи являются неотъемлемой частью решения. Так линии чаще всего представляют собой:

- 1) траектории движения тел или фиксированных точек;
- 2) границы плоских фигур или областей;
- 3) графики функций.

В первом случае наиболее естественным является *параметрический способ* задания линий:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (4.5.1)$$

Здесь  $\vec{r}$  – радиус-вектор движущейся точки, а  $t$  – эволюционный параметр (как правило, время).

Следует отметить, что параметрический способ позволяет задавать линии не только на плоскости, но и в пространстве. Зафиксируем некоторую декартову систему координат  $\mathcal{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$ . Тогда векторное соотношение (4.5.1) в координатной форме принимает вид системы:

– на плоскости

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad (4.5.2)$$

или

– в пространстве

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (4.5.3)$$

Дополнительно требуется указать область значений параметра  $t$ :

–  $t \in [t_1, t_2]$  (для *ограниченных* или *замкнутых* кривых);

–  $t \in [t_0, +\infty)$  или  $t \in (-\infty, +\infty)$  (для *неограниченных* кривых).

#### Пример 4.5.1. Циклоида

Зафиксируем точку  $A$  на ободе колеса радиуса  $R$ , движущегося прямолинейно (рис. 4.21). Тогда при определенных начальных условиях эта точка будет перемещаться по траектории, параметрические уравнения которой имеют вид:

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad (4.5.4)$$

где  $t \in [0, +\infty)$ .

Плоская кривая, задаваемая уравнением (4.5.4), называется **циклоидой**.

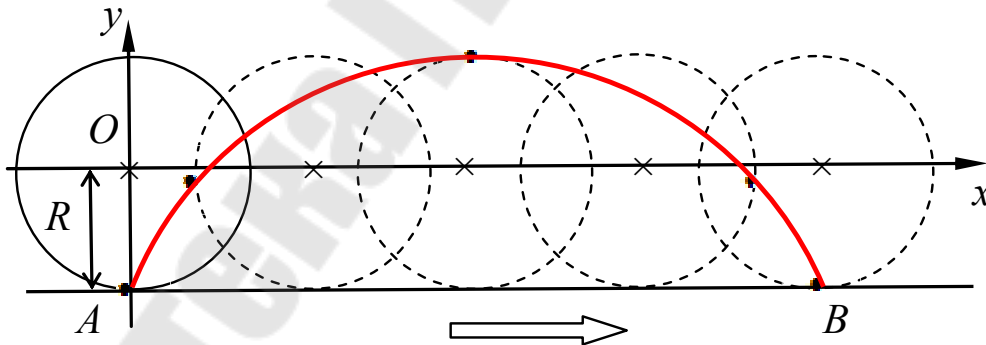


Рис. 4.21. Траектория движения точки  $A$ , закрепленной на ободе колеса. Колесо движется вправо без проскальзывания

Циклоида встречается во многих приложениях математики, в частности, в механике. Так, циклоида есть линия наибыстрейшего спуска (задача о брахистохроне, И. Бернулли, 1696 г.).

■

### Пример 4.5.2. Винтовая линия

Винтовые линии относятся к классу пространственных кривых. Различают цилиндрические, конические, сферические и другие винтовые линии. В частности, именно по цилиндрической винтовой линии движется точка, равномерно скользящая вдоль образующей цилиндра, в то время как сам цилиндр вращается вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью.

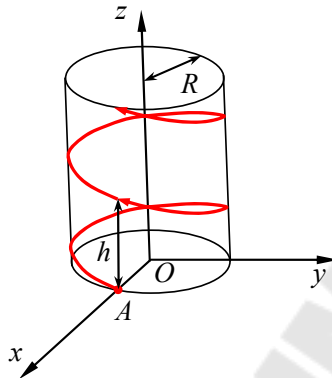


Рис. 4.22. Винтовая линия

Выберем декартову систему координат с осью  $Oz$ , совпадающей с осью симметрии кругового цилиндра радиуса  $R$  (рис. 4.22). Тогда винтовая линия, проходящая через точку  $A(R, 0, 0)$ , будет задаваться следующей системой параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = ht, \end{cases} \quad (4.5.5)$$

где  $h$  – шаг винтовой линии. ■

Предположим, что, например, первое уравнение параметрической системы (4.5.2) однозначно разрешимо относительно параметра  $t$ :  $t = t(x)$ . Подставляя выражение  $t(x)$  во второе уравнение системы вместо параметра  $t$ , получим уравнение кривой в явном виде:

$$y = y(t(x)) \equiv f(x). \quad (4.5.6)$$

Следует отметить, что в этом случае кривая может быть рассмотрена и как график функции  $f(x)$ . Понятно, что не любая кривая задает функцию (должно выполняться условие однозначности). По-

этому форма задания кривой в виде явного уравнения (4.5.6) не является общей.

Преобразуем соотношение (4.5.6), перебросив правую часть равенства влево:

$$y - f(x) \equiv F(x, y) = 0.$$

Такая форма уравнения кривой называется  *неявной* . Она допускает естественное обобщение:

$$\Phi(x, y) = 0. \quad (4.5.7)$$

Уравнение (4.5.7) будет задавать в фиксированной декартовой системе координат  $\mathcal{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$  кривую на плоскости, если этому уравнению будут удовлетворять  *только*  координаты точек  $M(x, y)$ , лежащих на этой кривой.

#### Определение 4.5.1

Линия называется  *алгебраической кривой порядка  $N$* , если она может быть задана уравнением (4.5.7), где  $\Phi(x, y)$  – многочлен двух переменных степени  $N$ :

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=0}^n \sum_{l=0}^m a_{kl} x^k y^l.$$

Всякая не алгебраическая кривая называется  *трансцендентной* .

Аналогичные уравнения и классификация существует и для поверхностей:

- *векторное параметрическое уравнение поверхности:*

$$\bar{r} = \bar{r}(u, v); \quad (4.5.8)$$

- *параметрическое уравнение поверхности:*

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \\ z = z(u, v); \end{cases} \quad (4.5.9)$$

- *уравнение поверхности в явном виде:*

$$z = f(x, y); \quad (4.5.10)$$

- *уравнение поверхности в неявном виде:*

$$\Phi(x, y, z) = 0. \quad (4.5.11)$$

Уравнение (4.5.11) будет задавать в фиксированной декартовой системе координат  $\mathfrak{D} = \langle O, \mathcal{B} \rangle$  поверхность в пространстве, если этому уравнению будут удовлетворять *только* координаты точек  $M(x, y, z)$ , лежащих на этой поверхности.

#### Определение 4.5.2

Поверхность называется *алгебраической поверхностью порядка  $N$* , если она может быть задана уравнением (4.5.11), где  $\Phi(x, y, z)$  – многочлен трех переменных степени  $N$ :

$$\Phi(x, y, z) = \sum_{k=0}^n \sum_{r=0}^m \sum_{s=0}^l a_{krs} x^k y^r z^s,$$

где  $m + n \leq N$ .

Всякая не алгебраическая поверхность называется *трансцендентной*.

Таким образом, согласно общей классификации кривых и поверхностей:

- *прямые* – это алгебраические кривые первого порядка;
- *плоскости* – это алгебраические поверхности первого порядка.

Вообще говоря, произвольные уравнения (4.5.7) и (4.5.11) могут и не иметь действительных решений. В этом случае они не задают никаких геометрических объектов. Глубокая связь между уравнениями, геометрическими линиями и поверхностями изучается в курсе *алгебраической геометрии*. В курсе аналитической геометрии изучаются только *алгебраические кривые и поверхности до второго порядка (включительно)*.

#### 4.6. Невырожденные кривые второго порядка

Запишем общее уравнение кривой второго порядка:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \quad (4.6.1)$$

где  $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$ . Здесь переменные  $x$  и  $y$  имеют смысл координат точек, лежащих на кривой. При смене базиса координаты изменятся, а значит, изменится и вид уравнения (4.6.1). Система координат, в которой уравнение (4.6.1) имеет наипростейший вид, называется **канонической**. При этом и само уравнение называется **уравнением в канонической форме** или просто **каноническим уравнением**.

Всего существует девять типов канонических уравнений кривых второго порядка. Два из них не имеют действительных решений. Еще четыре задают на плоскости либо точку, либо пару прямых (пересекающихся, параллельных, совпадающих). Они называются **вырожденными**. Оставшиеся три уравнения задают на плоскости, так называемые, **невырожденные кривые второго порядка**: эллипс, гиперболу и **параболу**. Эти кривые были открыты в Древней Греции как *конические сечения*.

### I. Эллипс

Дадим геометрическое определение эллипса как линии, обладающей определенным свойством.

#### Определение 4.6.1

*Эллипсом* называется плоская кривая, для *всех* точек которой сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости  $F_1$  и  $F_2$ , называемых *фокусами эллипса*, есть величина постоянная.

Расстояния от точек эллипса  $M$  до фокусов  $F_1$  и  $F_2$  называются *фокальными радиусами*:

$$r_1 = |MF_1|, \quad r_2 = |MF_2|, \quad \Rightarrow \quad r_1 + r_2 = \text{const.}$$

Замечательно, что из этого определения можно получить все сведения о свойствах эллипса, в том числе и о форме канонического уравнения.

#### Теорема 4.6.1 (о каноническом уравнении эллипса)

Пусть точки  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$  – фокусы эллипса в декартовой системе координат с осью абсцисс, проходящей через фокусы и началом в середине фокального отрезка  $[F_1 F_2]$ , причем

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{4.6.2}$$

Тогда в этой системе координат уравнение эллипса имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{4.6.3}$$

где

$$b^2 = a^2 - c^2. \tag{4.6.4}$$

Для доказательства теоремы необходимо записать выражения для фокальных радиусов  $r_1$  и  $r_2$  через координаты точек  $M(x, y)$ ,  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$ , подставить их в соотношение (4.6.2) и избавиться от иррациональности с помощью алгебраической операции возведения обеих частей равенства в квадрат.

### Изображение эллипса в канонической системе координат (СК)

Эллипс относится к специальному классу замкнутых кривых, а именно, к овалам, и располагается внутри прямоугольника, длины сторон которого равны  $2a$  и  $2b$  (рис. 4.23). В каноническом уравнении  $a > b$ , что следует из соотношения (4.6.4). Поэтому  $a$  часто называют длиной *большой полуоси эллипса*, а  $b$  – длиной *меньшей полуоси*.

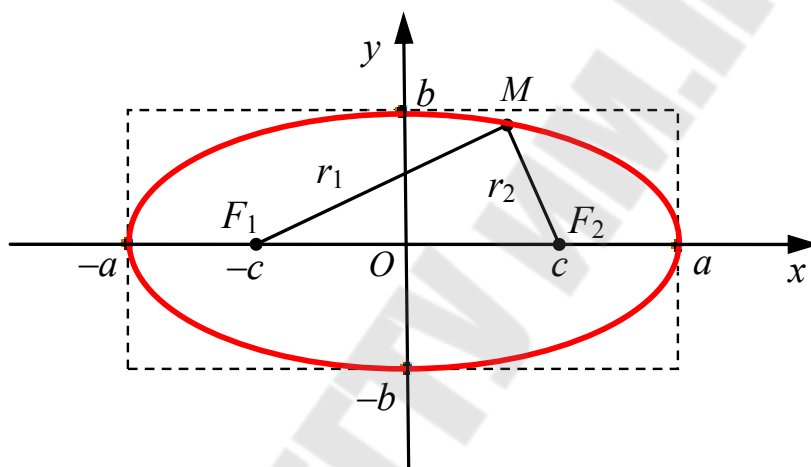


Рис. 4.23. Эллипс в канонической системе координат

### Основные общие свойства эллипса

Рассмотрим основные свойства эллипса:

1. Эллипс имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. В канонической системе координат они совпадают с координатными осями.

2. Середина фокального отрезка  $[F_1 F_2]$  является центром симметрии эллипса.

3. Фокусы эллипса  $F_1$  и  $F_2$  располагаются на большей его оси.

4. *Эксцентриситет эллипса*, который определяется как отношение длины фокального отрезка к длине большой оси, меньше единицы:

$$e = \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{c}{a} < 1. \quad (4.6.5)$$

Эксцентриситет эллипса характеризует степень его вытянутости вдоль большей оси.

5. В случае  $a = b = R$  эллипс вырождается в окружность радиуса  $R$ , при этом фокусы эллипса совпадают с центром окружности. Уравнение окружности радиуса  $R$  с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (4.6.6)$$

Для составления массива координат точек кривых удобно использовать параметрическую форму уравнений:

– *параметрические уравнения эллипса (в канонической СК):*

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t, \end{cases}$$

где  $t \in [0, 2\pi]$ ; (4.6.7)

– *параметрические уравнения окружности (с центром в начале координат и радиусом  $R$ ):*

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases}$$

где  $t \in [0, 2\pi]$ . (4.6.8)

**Пример 4.6.1.** Эллипс задан каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Найти координаты фокусов эллипса и его эксцентриситет.

*Решение*

Из уравнения находим длины полуосей:

$$a = \sqrt{9} = 3; \quad b = \sqrt{4} = 2.$$

Параметр  $c$  находим из соотношения (4.6.4):

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

Таким образом, фокусы эллипса находятся в точках  $F_1(-\sqrt{5}, 0)$  и  $F_2(\sqrt{5}, 0)$ , а его эксцентриситет (согласно формуле (4.6.5)) равен

$$e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0,7453.$$

Ответ:  $F_1(-\sqrt{5}, 0)$ ,  $F_2(\sqrt{5}, 0)$ ;  $e \approx 0,7453$ . ■

## II. Гипербола

Дадим геометрическое определение гиперболы, как линии, обладающей определенным свойством.

### Определение 4.6.2

*Гиперболой* называется плоская кривая, для всех точек которой модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости  $F_1$  и  $F_2$ , называемых *фокусами гиперболы*, есть величина постоянная:

$$|r_1 - r_2| = \text{const},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  – фокальные радиусы.

Определение позволяет получить все сведения о свойствах гиперболы, в том числе и о форме канонического уравнения.

### Теорема 4.6.2 (о каноническом уравнении гиперболы)

Пусть точки  $F_1(-c, 0)$  и  $F_2(c, 0)$  – фокусы гиперболы в декартовой системе координат с осью абсцисс, проходящей через фокусы и началом в середине фокального отрезка  $[F_1 F_2]$ , причем

$$|r_1 - r_2| = 2a. \quad (4.6.9)$$

Тогда в этой системе координат уравнение гиперболы имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (4.6.10)$$

где

$$b^2 = c^2 - a^2. \quad (4.6.11)$$

### Изображение гиперболы в канонической системе координат

Гипербола есть двусвязная кривая. Ее ветви располагаются вне прямоугольника, длины сторон которого равны  $2a$  и  $2b$ , и асимптотически приближаются к двум пересекающимся прямым (асимптотам гиперболы), проходящим через диагонали прямоугольника (рис. 4.24).

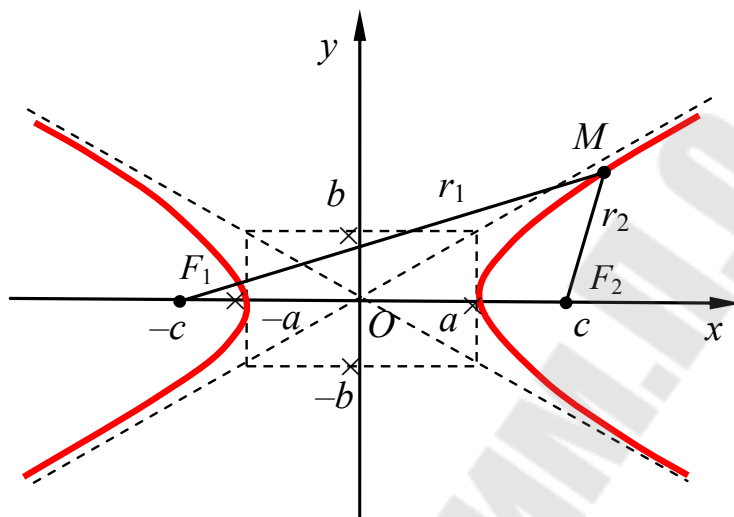


Рис. 4.24. Гипербола в канонической системе координат

### Основные общие свойства гиперболы

Рассмотрим общие свойства гиперболы:

1. Гипербола имеет две взаимно перпендикулярные оси симметрии. В канонической системе координат они совпадают с координатными осями.

2. Середина фокального отрезка  $[F_1 F_2]$  является центром симметрии гиперболы.

3. *Эксцентриситет гиперболы*, который определяется аналогично эксцентриситету эллипса, больше единицы:

$$e = \frac{|F_1 F_2|}{2a} = \frac{c}{a} > 1. \quad (4.6.12)$$

Эксцентриситет гиперболы характеризует степень сжатия ее ветвей к оси, проходящей через вершины (ось  $Ox$  в канонической системе координат).

4. Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \quad (4.6.13)$$

Параметрические уравнения гиперболы:

$$\begin{cases} x = \pm a \operatorname{ch} t, \\ y = \pm b \operatorname{ch} t, \end{cases}$$

где  $t \in \mathbb{R}$ .

(4.6.14)

### III. Парабола

#### Определение 4.6.3

*Параболой* называется плоская кривая, для всех точек которой расстояние  $r$  до фиксированной точки плоскости  $F$  равно расстоянию  $d$  до некоторой фиксированной прямой  $D$ :

$$r = d. \quad (4.6.15)$$

Точка  $F$  называется *фокусом параболы*, а прямая  $D$  – ее *директрисой*.

Определение позволяет получить все сведения о свойствах параболы, в том числе и о форме канонического уравнения.

#### Теорема 4.6.2 (о каноническом уравнении параболы)

Пусть в некоторой декартовой системе координат фокус параболы располагается в точке  $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ ,  $p > 0$ , а директриса задается уравнением

$$D: x = \frac{p}{2}. \quad (4.6.16)$$

Тогда в этой системе координат уравнение параболы имеет вид:

$$y^2 = 2px. \quad (4.6.17)$$

#### Изображение параболы в канонической системе координат

На рис. 4.25 представлена парабола в канонической системе координат.

#### Основные общие свойства параболы

Отметим основные свойства параболы:

1. Парабола обладает осью симметрии, которая проходит через ее вершину. В канонической системе координат она совпадает с осью  $Ox$ .

2. Эксцентриситет параболы равен единице.
3. Парабола является графиком квадратичной функции  $x = y^2$ .

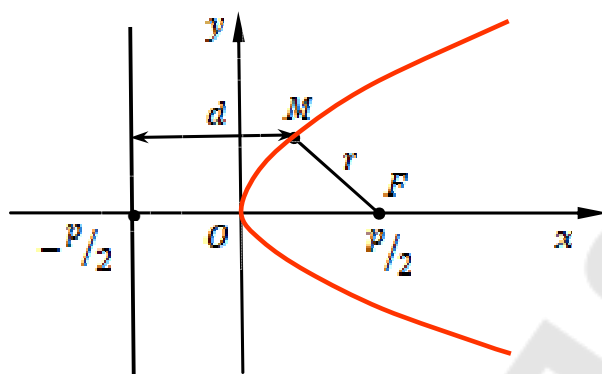


Рис. 4.25. Парабола в канонической системе координат

Параметрические уравнения параболы:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \sqrt{2pt}, \end{cases}$$

где  $t \in \mathbb{R}$ . (4.6.18)

**Пример 4.6.2.** Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, являющейся графиком функции  $y = x^2$ .

*Решение*

Перейдем в каноническую систему координат, выполнив замену переменных:

$$x = y'; \quad y = x'.$$

Запишем уравнение параболы в каноническом виде (4.6.17):

$$y = x^2 \Rightarrow y'^2 = x' \Rightarrow y'^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x'.$$

По виду уравнения определяем параметр  $p$ :  $p = 1/2$ .

Таким образом, в канонической системе координат фокус располагается в точке  $F(1/4, 0)$ , а директриса задается уравнением:  $x' = -1/4$ .

Возвращаясь в исходную систему координат согласно формулам перехода, получаем:

$$x_F = y'_F = 0, \quad y_F = x'_F = \frac{1}{4} \Rightarrow F(0, 1/4);$$

$$x'_D = y_D = -\frac{1}{4}. \Rightarrow D: y = -\frac{1}{4}.$$

Ответ:  $F(0, 1/4); D: y = -1/4.$

■

Чрезвычайно интересны оптические свойства параболических зеркал, которые широко используются в радиотехнических устройствах и телескопах. Так, лучи света, падающие на параболическое зеркало параллельно его оси симметрии, после отражения соберутся в фокусе зеркала, что позволяет усиливать слабые сигналы.

#### 4.7. невырожденные поверхности второго порядка

Запишем общее уравнение поверхности второго порядка:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (4.7.1)$$

Как и в случае плоских кривых, вид уравнения зависит от выбора системы координат, что позволяет ограничиться только изучением канонических уравнений. Всего существует 17 типов канонических уравнений. Восемь из них либо не имеют действительных решений (нет геометрических образов), либо имеют одно решение, геометрическим образом которого является точка, либо задают совокупности прямых и плоскостей. Оставшиеся 9 уравнений задают так называемые **невырожденные поверхности второго порядка**.

**Канонические уравнения и изображения невырожденных поверхностей второго порядка в канонической системе координат**

##### I. Эллипсоид

На рис. 4.26 показан эллипсоид в канонической системе координат.

Каноническое уравнение эллипсоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.7.2)$$

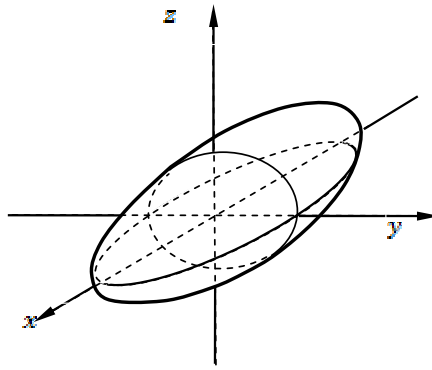


Рис. 4.26. Эллипсоид в канонической системе координат

При  $a = b = c \equiv R$  эллипсоид превращается в сферу. Уравнение сферы с центром в начале координат и радиусом  $R$  записывается как

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (4.7.3)$$

## II. Однополостный гиперболоид

Однополостный гиперболоид относится к классу *линейчатых поверхностей*, которые можно получить с помощью движения прямой линии – *прямолинейной образующей* поверхности.

Каноническое уравнение однополостного гиперболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (4.7.4)$$

На рис. 4.27 мы видим однополостный гиперболоид в канонической системе координат.

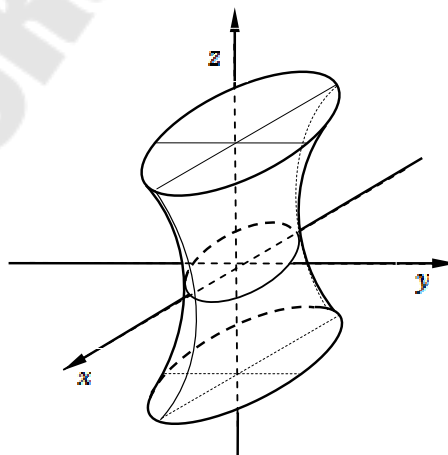


Рис. 4.27. Однополостный гиперболоид в канонической системе координат

В частности, тело вращения куба вокруг его диагонали имеет боковую поверхность, являющейся частным случаем однополостного гиперboloида. Здесь прямолинейной образующей является ребро куба, непересекающееся с его диагональю.

### III. Двуполостный гиперboloид

Каноническое уравнение двуполостного гиперboloида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \quad (4.7.5)$$

Двуполостный гиперboloид в канонической системе координат изображен на рис. 4.28.

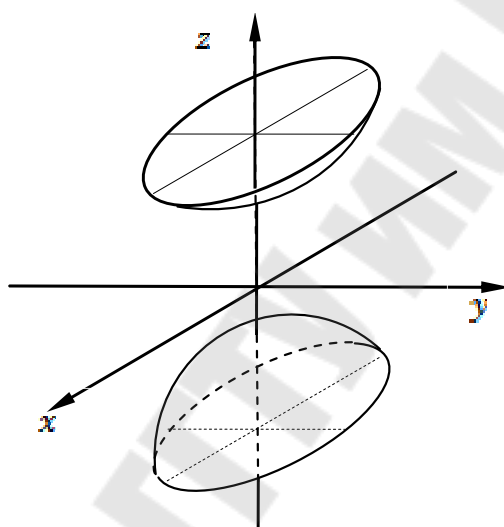


Рис. 4.28. Двуполостный гиперboloид в канонической системе координат

### IV. Конус

Каноническое уравнение конуса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0. \quad (4.7.6)$$

На рис. 4.29 представлен конус в канонической системе координат.

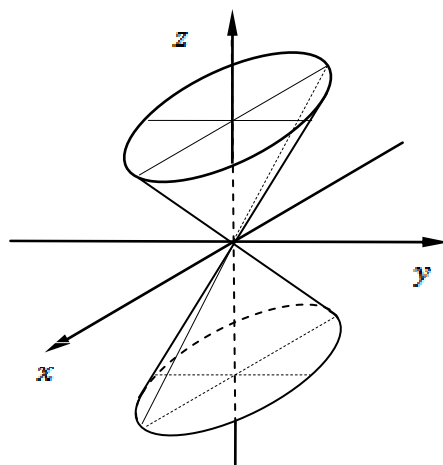


Рис. 4.29. Конус в канонической системе координат

### V. Эллиптический параболоид

Каноническое уравнение эллиптического параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (4.7.7)$$

Эллиптический параболоид в канонической системе координат показан на рис. 4.30.

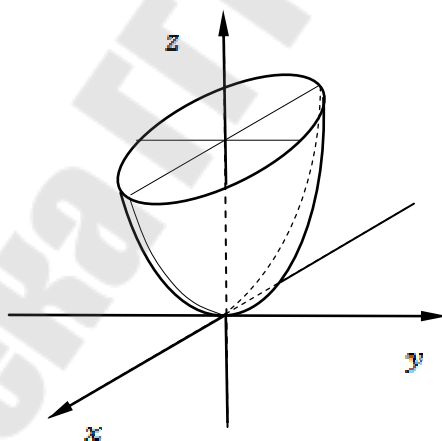


Рис. 4.30. Эллиптический параболоид в канонической системе координат

### VI. Гиперболический параболоид

Каноническое уравнение гиперболического параболоида:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z. \quad (4.7.8)$$

Приведем на рис. 4.31 изображение гиперболического параболоида в канонической системе координат

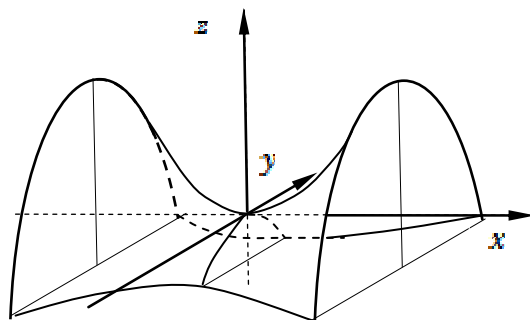


Рис. 4.31. Гиперболический параболоид в канонической системе координат

## VII. Эллиптический цилиндр

Каноническое уравнение эллиптического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.7.9)$$

На рис. 4.32 представлен эллиптический цилиндр в канонической системе координат.

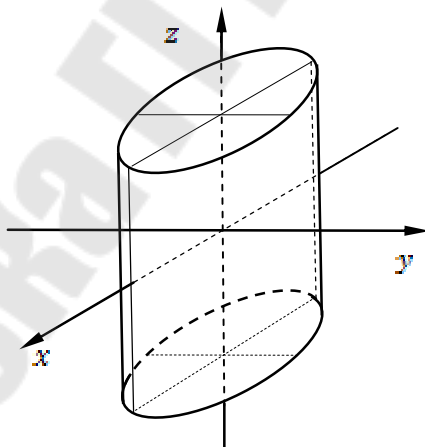


Рис. 4.32. Эллиптический цилиндр в канонической системе координат

## VIII. Гиперболический цилиндр

Каноническое уравнение гиперболического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (4.7.10)$$

На рис. 4.33 показан гиперболический цилиндр в канонической системе координат.

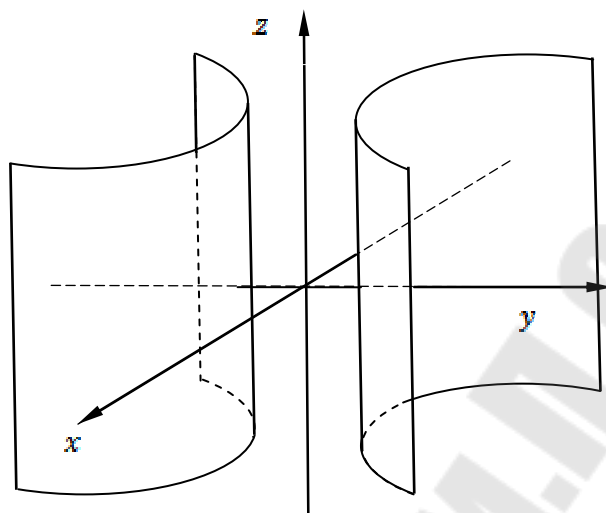


Рис. 4.33. Гиперболический цилиндр в канонической системе координат

### IX. Параболический цилиндр

Каноническое уравнение параболического цилиндра:

$$\frac{x^2}{a^2} = 2z. \quad (4.7.11)$$

Параболический цилиндр в канонической системе координат приведен на рис. 4.34.

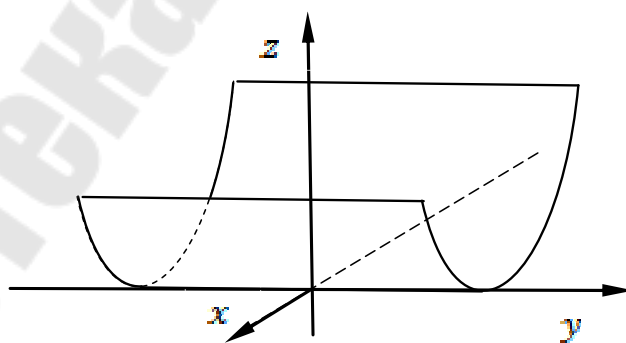


Рис. 4.34. Параболический цилиндр в канонической системе координат

## ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 4

**142.** Написать уравнение прямой, проходящей через точку  $M_0(-1, 2)$  перпендикулярно к вектору: а)  $\vec{n} = (-1, 4)$ ; б)  $\overline{M_1M_2}$ , если  $M_1(2, -7)$ ,  $M_2(3, 2)$ .

**143.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых  $3x - 2y - 4 = 0$  и  $2x - y - 3 = 0$  параллельно оси: а) ординат; б) абсцисс.

**144.** Записать уравнение прямой, проходящей через точку  $A(3, -1)$  параллельно: а) биссектрисе первого координатного угла; б) прямой  $y = 3x + 9$ .

**145.** Указать особенности расположения на плоскости прямых: а)  $2x - 3y = 0$ ; б)  $4x + 5 = 0$ ; в)  $y - 1 = 0$ ; г)  $x = 0$ .

**146.** Даны точки  $A_1(2, 3)$ ,  $A_2(1, -2)$ ,  $A_3(5, 2)$ . Составить уравнения: а) прямой  $(A_1A_2)$ ; б) прямой  $(A_1M)$ , перпендикулярной прямой  $(A_1A_2)$ ; в) прямой  $(A_1N)$ , параллельной прямой  $(A_1A_3)$ .

**147.** Написать каноническое и параметрическое уравнения прямой, проходящей через точку  $A_1(3; -2)$  параллельно: а) вектору  $\vec{s} = (1, 5)$ ; б) вектору  $\overline{M_1M_2}$ , если  $M_1(-1, 2)$ ,  $M_2(3, 1)$ .

**148.** Показать, что точка  $M_1(-1, 2)$  принадлежит прямой  $L$ :  $x = 2t$ ,  $y = -1 - 6t$ . Найти соответствующее этой точке значение параметра  $t$ .

**149.** Написать параметрические уравнения прямой на плоскости, если известно, что прямая проходит через точку  $A_1(3, -2)$  перпендикулярно прямой  $5x + 4y + 2 = 0$ .

**150.** Луч света направлен по прямой  $y = \frac{2}{3}x - 4$ . Найти координаты точки  $M$  встречи луча с осью  $Ox$  и уравнение отраженного луча.

**151.** Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол  $45^\circ$  с прямой  $y = 2x + 5$ .

**152.** По данным уравнениям построить прямые, найти их нормальные векторы, направляющие векторы, угловые коэффициенты и отрезки, отсекаемые ими на осях координат: а)  $2x - y + 3 = 0$ ; б)  $3x - y = 0$ .

**153.** Треугольник  $ABC$  задан координатами своих вершин. Требуется: 1) написать уравнение высоты ( $CD$ ) и вычислить ее длину  $h = |CD|$ ; 2) найти угол между высотой ( $CD$ ) и медианой ( $BM$ ); 3) написать уравнение биссектрисы  $L$  внутреннего угла при вершине  $A$ .  
 а)  $A(1, 2)$ ,  $B(2, -2)$ ,  $C(6, 1)$ ; б)  $A(2, -2)$ ,  $B(6, 1)$ ,  $C(-2, 0)$ .

**154.** Найти угол  $\varphi$  между прямыми на плоскости:

$$\text{а) } \begin{cases} 5x - 2y + 7 = 0, \\ 2x + 5y + 5 = 0; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} \frac{x}{25} - \frac{y}{15} = 1, \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{12} = -1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} y = 2x - 3, \\ y = 2x + 5; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} y = 3x + 5, \\ y = \frac{1}{2}x + 3. \end{cases}$$

**155.** Исследовать взаимное расположение прямых  $L_1$  и  $L_2$ :

$$\text{а) } L_1: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1}; \quad L_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y}{0};$$

$$\text{б) } L_1: x + y - 1 = 0; \quad L_2: 2x - 2y + 1 = 0;$$

$$\text{в) } L_1: x + y - 1 = 0; \quad L_2: \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2};$$

$$\text{г) } L_1: -x + 2y + 1 = 0; \quad L_2: 2x - 4y - 2 = 0.$$

**156.** Составить уравнение прямой, которая проходит через точку  $M(8, 6)$  и отсекает от координатного угла треугольник с площадью, равной 12.

**157.** Написать уравнение прямой, привести его к нормальному виду и указать расстояние от начала координат до прямой. Прямая задана точкой  $M_0$  и нормальным вектором  $\bar{n}$ : а)  $M_0(-1, 2)$ ,  $\bar{n} = (2, 2)$ ; б)  $M_0(1, 1)$ ,  $\bar{n} = (2, -1)$ .

**158.** Написать уравнение сторон треугольника, зная одну его вершину  $B(2, -7)$ , а также уравнения высоты  $3x + y + 11 = 0$  и медианы  $x + 2y + 7 = 0$ , проведенных из различных вершин.

**159.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M$  перпендикулярно к вектору  $\bar{n}$ , если: а)  $M(3, 5, -1)$ ,  $\bar{n} = (13, 2, 1)$ ; б)  $M(0, -4, 5)$ ,  $\bar{n} = (3, -2, 4)$ .

**160.** Указать особенности в расположении следующих плоскостей:

$$\text{а) } 2x - 3y + z = 0; \quad \text{б) } x - 2y + 5 = 0; \quad \text{в) } y + 5z = 0;$$

$$\text{г) } 3x + 5 = 0; \quad \text{д) } 2x - 3y - 1 = 0; \quad \text{е) } y = 0.$$

**161.** Заданы плоскость  $P$  и точка  $M$ . Написать уравнение плоскости  $P'$ , проходящей через точку  $M$  параллельно плоскости  $P$ , если:

а)  $P: -2x + y - z + 1 = 0$ ,  $M(1, 1, 1)$ ;

б)  $P: x - y - 1 = 0$ ,  $M(-1, 2, 3)$ .

**162.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точку  $M$  параллельно векторам  $\bar{a}_1$  и  $\bar{a}_2$ , если:

а)  $M(1, 1, 1)$ ,  $\bar{a}_1 = (0, 1, 2)$ ,  $\bar{a}_2 = (-1, 0, 1)$ ;

б)  $M(0, -2, 1)$ ,  $\bar{a}_1 = (2, 0, 1)$ ,  $\bar{a}_2 = (1, 1, 0)$ .

**163.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки  $M_1$  и  $M_2$  перпендикулярно заданной плоскости  $P$ , если:

а)  $P: -x + y - 1 = 0$ ,  $M_1(1, 2, 0)$ ,  $M_2(2, 1, 1)$ ;

б)  $P: 2x - y + z + 1 = 0$ ,  $M_1(0, 1, 1)$ ,  $M_2(2, 0, 1)$ .

**164.** Найти длины отрезков, отсекаемых на осях координат плоскостью: а)  $3x - 2y + z - 6 = 0$ ; б)  $2x - 3y - 4z + 12 = 0$ .

**165.** Написать уравнение плоскости, проходящей через три точки  $M_1$ ,  $M_2$  и  $M_3$ , если:

а)  $M_1(1, 3, 4)$ ,  $M_2(3, 0, 2)$ ,  $M_3(2, 5, 7)$ ;

б)  $M_1(-1, 2, 5)$ ,  $M_2(3, 1, 4)$ ,  $M_3(1, 1, 7)$ .

**166.** Найти расстояние  $d$  от точки  $M_1(-2, 4, 3)$  до плоскости  $x - 2y + 2z + 13 = 0$ .

**167.** Вычислить объем пирамиды, ограниченной координатными плоскостями и плоскостью  $2x - 3y + 6z - 12 = 0$ .

**168.** Составить уравнение плоскости, проходящей через точку  $M(2, -1, 5)$  перпендикулярно к плоскостям  $x + 15y - z + 1 = 0$  и  $2x + 3y + z - 5 = 0$ .

**169.** На расстоянии 4 единиц от плоскости  $2x - 6y + 3z - 56 = 0$  проведите параллельную ей плоскость и запишите ее уравнение.

**170.** Найти угол между плоскостями:

а)  $x + 2y - z + 5 = 0$ ,  $2x - y + z - 3 = 0$ ;

б)  $2x - y + 2z + 10 = 0$ ,  $x - y + 5 = 0$ .

**171.** Найти точку пересечения плоскостей:

$x + y + z - 6 = 0$ ,  $2x - y + z - 3 = 0$ ,  $x + 2y - z - 2 = 0$ .

**172.** Найти расстояние между плоскостями:

а)  $2x - 3y + 6z - 21 = 0$ ,  $4x - 6y + 12z + 35 = 0$ ;

б)  $x - 2y + z - 1 = 0$ ,  $2x - 4y + 2z - 1 = 0$ .

**173.** Исследовать взаимное расположение плоскостей:

а)  $P_1: -x + 2y - z + 1 = 0$ ,  $P_2: y + 3z - 1 = 0$ ;

б)  $P_1: x - y + 1 = 0$ ,  $P_2: y - z + 1 = 0$ ;

в)  $P_1: 2x - y + z - 1 = 0$ ,  $P_2: -4x + 2y - 2z - 1 = 0$ ;

г)  $P_1: 2x - y - z + 1 = 0$ ,  $P_2: -4x + 2y + 2z - 2 = 0$ .

**174.** Написать канонические уравнения прямой:

а)  $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 3, \\ z = 3t - 5; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} x = 7t - 5, \\ y = -t + 3, \\ z = t. \end{cases}$

**175.** Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку  $M_0(2, 0, -3)$  параллельно: а) вектору  $\vec{s} = (2, -3, 5)$ ; б) оси  $Ox$ ;

в) прямой  $\frac{x-1}{5} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{-1}$ ; г) оси  $Oz$ .

**176.** Записать уравнения оси  $Oy$ : а) в параметрическом виде; б) в каноническом виде; в) общими уравнениями.

**177.** Написать уравнения прямой, проходящей через две заданные точки  $M_1$  и  $M_2$ , если: а)  $M_1(1, -2, 1)$ ,  $M_2(3, 1, -1)$ ; б)  $M_1(3, -1, 0)$ ,  $M_2(1, 0, -3)$ .

**178.** Составить канонические уравнения прямых:

а)  $\begin{cases} 2x + y + z - 1 = 0, \\ 3x + 2y + z - 2 = 0; \end{cases}$  б)  $\begin{cases} 3x - 2y + 5z - 10 = 0, \\ 2x + y - z = 0. \end{cases}$

**179.** Составить уравнение прямой, проходящей через точку  $M(3, -1, 2)$  перпендикулярно к прямым:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y-7}{1} = \frac{z-3}{4}$ ,  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$ ;

б)  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+5}{-4}$ ,  $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

**180.** Выяснить, пересекаются ли данные прямые, и в случае положительного ответа найти точку их пересечения:

а)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-4}{3}$ ,  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-5}{1}$ ;

б)  $\begin{cases} 3x + y + 7z - 2 = 0, \\ x + y - 4z + 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 2y + 3z + 1 = 0, \\ 9x + 5y + 2z + 9 = 0. \end{cases}$

**181.** Найти угол между прямой и плоскостью:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{1}$ ,  $x + 2y - z + 5 = 0$ ;

б)  $\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0, \\ x + 2y - 3z - 1 = 0, \end{cases} \quad 2x - y - z + 7 = 0.$

**182.** Найти значение параметра  $\alpha$ , при котором прямая параллельна плоскости:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{-1}$ ,  $\alpha x + 2y - 6z + 7 = 0$ ;

б)  $\frac{x-5}{1} = \frac{y+7}{\alpha} = \frac{z-2}{-2}$ ,  $2x + 8y - 15z + 3 = 0.$

**183.** Найти точку пересечения прямой и плоскости:

а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{2}$ ,  $x + y - z + 1 = 0$ ;

б)  $\begin{cases} 3x - y + 2z - 4 = 0, \\ x + y - z - 1 = 0, \end{cases} \quad x - 2y + z = 0.$

**184.** Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую  $\frac{x-2}{5} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{2}$  перпендикулярно к плоскости  $x + 4y - 3z + 7 = 0$ .

**185.** Вычислить расстояние между прямыми:  $\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4} = \frac{z}{2}$   
и  $\frac{x-7}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-3}{2}$ .

**186.** Построить эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 225$ . Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнение директрис.

**187.** Составить каноническое уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси  $Ox$ , если известно, что:

- а) расстояние между фокусами равно 8, малая полуось равна 3;
- б) большая ось равна 26, эксцентриситет равен  $5/13$ ;
- в) сумма полуосей равна 18, расстояние между фокусами равно 24;
- г) расстояния от одного из фокусов эллипса до концов его большой оси равны 10 и 2.

**188.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет эллипс, найти его центр  $O$ , полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис:

а)  $5x^2 + 9y^2 - 30x + 18y + 9 = 0$ ;

б)  $16x^2 + 25y^2 + 25x - 100y - 284 = 0$ .

**189.** Построить гиперболу  $16x^2 - 9y^2 = 144$ . Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

**190.** Написать каноническое уравнение гиперболы, если: а)  $a = 2$ ,  $b = 3$ ; б)  $b = 4$ ,  $c = 5$ ; в)  $c = 3$ ,  $e = 3/2$ ; г)  $a = 8$ ,  $e = 5/4$ ; д)  $c = 10$  и уравнения асимптот  $y = \pm 4/3x$ .

**191.** Установить, что каждое из следующих уравнений определяет гиперболу, найти ее центр, полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис:

а)  $16x^2 - 9y^2 - 64x - 54y - 161 = 0$ ;

б)  $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$ .

**192.** Построить следующие параболы и найти их параметры:

а)  $y^2 = 6x$ ; б)  $x^2 = 5y$ ; в)  $y^2 = -4x$ ; г)  $x^2 = -y$ .

**193.** Написать уравнение параболы, если известны:

а) фокус  $F(4, 3)$  и директриса  $y + 1 = 0$ ;

б) фокус  $F(2, -1)$  и директриса  $x - y - 1 = 0$ .

## Лекция 11

### ГЛАВА 5. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И ОПЕРАТОРЫ

Обобщение в математике является одним из главных направлений ее развития. Оно сродни взгляду на знакомую местность с высоты, когда при потере детализации выявляются полные очертания объектов, четко проявляются связи между ними, открываются новые перспективы. Так, в предыдущих главах были рассмотрены множества матриц и геометрических векторов. Несмотря на различную природу этих математических объектов, операции сложения и умножения на число над ними обладают совершенно одинаковыми свойствами. Теперь, если наделить эти свойства статусом аксиом, причем без учета конкретной реализации самих операций, то все следствия будут автоматически иметь общий характер, что, в свою очередь, предполагает целесообразность изучения абстрактных математических объектов, на множестве которых определены операции данного типа.

#### 5.1. Линейные пространства

Рассмотрим множество действительных чисел  $\mathbb{R}$  и непустое множество  $\mathcal{L}$  элементов  $x, y, z, \dots$ . Пусть на  $\mathcal{L}$  заданы бинарная операция, которую назовем **сложением**:

$$\forall x, y \in \mathcal{L} \rightarrow x + y \in \mathcal{L},$$

и операция, которую назовем **умножением на действительное число**:

$$\forall x \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R} \rightarrow \lambda x \in \mathcal{L}.$$

##### Определение 5.1.1

Множество  $\mathcal{L}$  называется линейным пространством, если операции сложения и умножения на число обладают следующими свойствами:

$L_1:$	$\forall x, y \in \mathcal{L}$	$x + y = y + x$
$L_2:$	$\forall x, y, z \in \mathcal{L}$	$x + (y + z) = (x + y) + z$
$L_3:$	$\exists \mathbf{0} \in \mathcal{L} \forall x \in \mathcal{L}$	$x + \mathbf{0} = x$
$L_4:$	$\forall x \in \mathcal{L} \exists -x \in \mathcal{L}$	$x + (-x) = \mathbf{0}$
$L_5:$	$\forall x \in \mathcal{L}$	$1 \cdot x = x$

### Определение 5.1.1

$L_6:$	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$\lambda(\mu \mathbf{x}) = (\lambda \mu) \mathbf{x}$
$L_7:$	$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}, \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda \mathbf{x} + \lambda \mathbf{y}$
$L_8:$	$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{L}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$	$(\lambda + \mu) \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{x}$

Сразу подчеркнем, что, несмотря на знакомые обозначения и названия операций, в общих линейных пространствах они не конкретизируются и имеют абстрактный характер. Существенными для последующих выводов являются только их свойства – аксиомы  $L_1$ – $L_8$ . Конкретная их реализация может быть очень далека от привычных операций сложения и умножения на число в арифметике или в матричной алгебре.

Появление понятия линейного пространства напрямую связано с попытками применения эффективных методов векторной алгебры (главным образом метода координат) для решения задач, сформулированных на языке многомерных пространств, например, арифметических пространств  $\mathbb{R}^n$ , состоящих из упорядоченных числовых наборов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  длины  $n$ . Поэтому линейные пространства часто называют **векторными пространствами**, а их элементы соответственно **векторами**. Для обозначения абстрактных векторов используется либо полужирный шрифт –  $\mathbf{x}$ , либо черта сверху –  $\bar{x}$ , либо просто буквы латинского алфавита –  $x, y, z, \dots$ . Числовые коэффициенты обозначаются с использованием букв греческого алфавита –  $\lambda, \mu, \nu, \dots$ .

К сожалению, при использовании упрощенных обозначений нулевые элементы линейных пространств и нулевые коэффициенты (число ноль) обозначаются одинаково как 0. Их идентификация производится исходя из смысла и содержания рассматриваемого символического выражения.

В дальнейшем с целью более четкого разделения математических объектов, имеющих разную природу, (на что действительно необходимо акцентировать внимание на первых этапах обучения) для обозначения элементов абстрактных линейных пространств  $\mathcal{L}$  мы будем использовать полужирный шрифт, а для наборов действительных чисел (элементов пространств  $\mathbb{R}^n$ ) – черту сверху.

Из определения (5.1.1) следует, что отличительными характеристиками линейных пространств являются:

- замкнутость относительно операции сложения;
- замкнутость относительно операции умножения на число;
- наличие нулевого элемента  $\mathbf{0}$  (аксиома  $L_3$ );
- наличие противоположного элемента, обозначаемого как  $-x$ , для любого элемента  $x$  пространства (аксиома  $L_4$ ).

**Пример 5.1.1.** Установить, является ли множество всех матриц с обычными операциями сложения и умножения на число линейным пространством.

*Решение*

Множество всех матриц с бинарной операцией, выбранной как обычная сумма матриц, линейным пространством не является, так как данная операция определена не для любых матриц. Линейное пространство образуют только матрицы одного размера  $M_{m \times n}$ .

**Пример 5.1.2.** Установить, можно ли рассматривать множество положительных действительных чисел как линейное пространство.

*Решение*

Если в качестве бинарной операции выбрать арифметическую операцию сложения  $x + y$ , то множество неотрицательных действительных чисел линейное пространство не образует, так как оно не содержит нулевого элемента и элементов, противоположных элементам множества – отрицательных чисел.

Однако, если в качестве бинарной операции выбрать операцию умножения « $x + y$ »  $\equiv xy$ , а в качестве операции «умножение на число» выбрать операцию возведения в степень « $\lambda x$ »  $\equiv x^\lambda$ , то множество неотрицательных действительных чисел будет наделено структурой линейного пространства, в чем нетрудно убедиться, проверив выполнение аксиом  $L_1$ – $L_8$ . При этом роль нулевого элемента будет играть 1, а роль противоположного элемента – обратный элемент  $x^{-1}$ .

### **Общие свойства линейных пространств**

Укажем некоторые общие свойства линейных пространств:

1. Линейное пространство  $\mathcal{L}$  содержит единственный нулевой элемент  $\mathbf{0}$ .
2. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$  для любого элемента  $x$  существует *единственный* противоположный элемент  $-x$ .

3. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$  для элемента  $-x$  противоположным является элемент  $x$ :

$$-(-x) = x.$$

4. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$  произведение числа  $-1$  на элемент  $x$  есть противоположный элемент  $-x$ :

$$(-1) \cdot x = -x.$$

5. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$  произведение любого числа  $\lambda$  на нулевой элемент есть нулевой элемент:

$$\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

6. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$ , если  $\lambda \cdot x = \mathbf{0}$ , то либо  $\lambda = 0$ , а  $x$  – любой элемент  $\mathcal{L}$ , либо  $x = \mathbf{0}$ , а  $\lambda$  – любое число.

7. В линейном пространстве  $\mathcal{L}$  уравнение  $a + x = b$  имеет единственное решение:

$$x = b + (-a) \equiv b - a, \quad \forall a, b \in \mathcal{L}.$$

Все свойства являются следствиями аксиом линейного пространства  $L_1-L_8$ .

## 5.2. Размерность и базис линейных пространств

Ранее в параграфе 3 главы 3 были введены понятия размерности и базиса в пространстве геометрических векторов. Обобщим эти понятия на произвольные линейные пространства.

Выберем некоторую систему  $m$  элементов линейного пространства  $\mathcal{L} - \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ , и с помощью основных операций пространства построим из них новый элемент:

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \in \mathcal{L}, \quad (5.2.1)$$

где  $x_k \in \mathcal{L}$ ,  $\lambda_k \in \mathbb{R}$ .

Представление элемента в таком виде называется **линейной комбинацией**. Возможность представления в виде такой комбинации нулевого элемента пространства наделяет выбранную систему важнейшей качественной характеристикой.

### Определение 5.2.1

Система элементов  $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  называется *линейно независимой*, если нулевой элемент пространства  $\mathbf{0}$  может быть представлен в виде их линейной комбинации только с использованием нулевых коэффициентов:

$$\begin{aligned}\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m &= \mathbf{0}, & (5.2.2) \\ \Downarrow \\ \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m &= 0.\end{aligned}$$

В противном случае система называется *линейно зависимой*.

Набор нулевых числовых коэффициентов часто называют тривиальным.

Суть линейной независимости заключается в том, что ни один элемент линейно независимой системы не может быть представлен в виде линейной комбинации других элементов этой же системы.

В линейном пространстве имеется только одна линейно зависимая одноэлементная система, а именно:  $\{\mathbf{0}\}$ .

#### Общие критерии линейной зависимости

Приведем общие критерии линейной зависимости:

I. Всякая система, содержащая нулевой элемент  $\mathbf{0}$ , линейно зависима.

II. Всякая система, содержащая подмножество линейно зависимых элементов, линейно зависима.

В пространстве геометрических векторов существуют достаточно простые и наглядные критерии линейной зависимости систем векторов, использующие отношения коллинеарности и компланарности. В общих линейных пространствах нет возможности напрямую использовать аналоги этих геометрических отношений. Тем не менее, в ряде случаев установить факт линейной независимости можно непосредственно из анализа соотношения (5.2.2).

#### Пример 5.2.1. Арифметическое пространство $\mathbb{R}^n$

Элементами арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$  являются упорядоченные наборы  $n$  действительных чисел  $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Введем операции сложения элементов и умножения их на число как обычные арифметические действия над соответствующими компонентами:

$$(\bar{x} + \bar{y})_k = x_k + y_k; \quad (\lambda \bar{x})_k = \lambda x_k, \quad \forall k = \overline{1, n}. \quad (5.2.3)$$

Нетрудно убедиться, что введенные операции удовлетворяют аксиомам  $L_1-L_8$ , а значит, наделяют  $\mathbb{R}^n$  структурой линейного пространства. Рассмотрим следующую систему элементов из  $\mathbb{R}^n$ :

$$\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\},$$

где  $(\bar{e}_i)_k = \delta_{ik}$ .

Здесь  $\delta_{ik}$  –  $\delta$ -символ Кронекера:  $\delta_{ik} = 0$ , если  $i \neq j$ , и  $\delta_{ii} = 1$  для  $\forall i = \overline{1, n}$ .

Выясним, является ли система  $\mathcal{E}$  линейно независимой. Для этого подставим в левую часть равенства (5.2.2) явный вид наших элементов и выполним все действия. В результате получим:

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = \bar{0} \equiv (0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Таким образом, согласно определению (5.2.1) система  $\mathcal{E}$  является линейно независимой. ■

### Определение 5.2.2

Линейное пространство  $\mathcal{L}$  называется конечномерным, если в нем существует система из  $n$  линейно независимых элементов, а любая система, содержащая  $n+1$  элемент, будет линейно зависимой. При этом число  $n$  называется размерностью конечномерного пространства:

$$\dim \mathcal{L} = n.$$

Линейное пространство, которое не является конечномерным, называется бесконечномерным.

В частности, размерность линейного пространства  $\mathcal{L} = \{\mathbf{0}\}$ , содержащего только один нулевой элемент, равна 0. Размерность пространства  $\mathbb{R}^n$  равна  $n$ . Размерность конечномерного пространства будем указывать с помощью верхнего индекса:  $\mathcal{L}^n$ .

### Определение 5.2.3

Базисом конечномерного линейного пространства размерности  $n$  называется любая система, состоящая из ровно  $n$  линейно независимых элементов.

Система  $\mathcal{E} = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n\}$ , рассмотренная в примере 5.2.1, является базисом в линейном пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Теорема 5.2.1 (о базисе)**

Пусть система элементов  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  является базисом в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  размерности  $n$ . Тогда любой элемент  $x$  пространства единственным образом может быть разложен по базису  $\mathcal{B}$ :

$$x = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n. \quad (5.2.4)$$

Важность теоремы заключается в том, что в линейных пространствах независимо от их природы при заданном базисе каждый элемент может быть однозначно идентифицирован по набору чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  – коэффициентам разложения (5.2.4), которые называются **координатами элемента  $x$**  в базисе  $\mathcal{B}$ . Задание элементов линейного пространства с указанием наборов их координат позволяет свести операции над элементами линейного пространства к арифметическим действиями над координатами:

$$x + y \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n\},$$

$$\lambda x \Rightarrow \lambda \bar{x} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n\}.$$

*Определение 5.2.4*

Изоморфизмом линейных пространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  называется всякое правило  $\varphi$ , позволяющее установить взаимно однозначное соответствие между их элементами и сохраняющее линейность определяющих структуру пространств операций сложения и умножения на число:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y); \quad (5.2.5)$$

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(x). \quad (5.2.6)$$

При наличии изоморфизма говорят, что пространства  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  **изоморфны**. Отношение изоморфизма обозначается как  $\mathcal{L}_1 \cong \mathcal{L}_2$ .

Отношение изоморфизма есть отношение эквивалентности. Изоморфные пространства имеют совершенно одинаковую структуру и свойства.

Не любое взаимно однозначное отображение может устанавливать изоморфизм между линейными пространствами.

**Пример 5.2.2.** Выяснить, устанавливает ли отображение  $\varphi: x \rightarrow x^3$  между элементами линейных пространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , представляющих собой множества действительных чисел  $\mathbb{R}$  с линейными операциями как обычными арифметическими действиями сложения и умножения, изоморфизм.

*Решение*

По условию отображение  $\varphi$  задается как

$$w = \varphi(x) = x^3.$$

На множестве действительных чисел  $\mathbb{R}$  это уравнение имеет единственное решение:  $x = \sqrt[3]{w}$ , поэтому  $\varphi$  – взаимно однозначное отображение.

Далее проверим выполнение соотношения (5.2.5):

$$(x + y)^3 = x^3 + y^3 \Rightarrow 3xy(x + y) = 0.$$

Полученное равенство не является общим, то есть тождеством, а выполняется только, если  $x = 0$ ,  $y = 0$  или  $y = -x$ .

Таким образом, отображение  $\varphi$  в общем случае линейность операции сложения не сохраняет, а значит, изоморфизм между пространствами  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  не устанавливает. ■

Наборы координат, как следует из примера 5.2.1, являются элементами арифметического пространства  $\mathbb{R}^n$ . Поэтому сопоставление элементам линейного пространства  $\mathcal{L}^n$  набора координат в фиксированном базисе, по существу, устанавливает изоморфизм  $\mathcal{L}^n \cong \mathbb{R}^n$ . А так как изоморфизм есть отношение эквивалентности, и потому обладает свойством транзитивности, то все линейные пространства одной размерности изоморфны между собой.

Наборы координат как представления элементов линейных пространств удобны не только для выполнения операций над элементами, но и для решения многих других задач линейной алгебры. Безусловно, важнейшей из них является задача о выборе базиса.

Пусть имеется некоторая система  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  элементов линейного пространства  $\mathcal{L}$ .

*Определение 5.2.5*

Рангом  $r$  системы элементов линейного пространства называется максимальное число, содержащихся в системе линейно независимых элементов.

В случае конечномерных пространств  $\mathcal{L}^n$  ранг системы элементов не может превышать размерности пространства  $\dim \mathcal{L} = n$ . Системы, ранг которых равен размерности пространства:  $r = n$ , называются **полными**. В частности, полными являются и базисные системы. Но в базисных системах число элементов  $m$  в точности равно размерности пространства:  $m = n$ , в то время как в произвольной полной системе число элементов может быть и больше  $n$ . Разложение элементов линейного пространства по полной системе возможно. Однако использование небазисных полных систем приведет к потере единственности разложения. А значит, наборы коэффициентов таких разложений уже не будут однозначно представлять элементы линейного пространства ( $\mathcal{L}^n \not\cong \mathbb{R}^m$ , если  $m > n$ ).

Для определения ранга системы элементов  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , заданных своими координатами в некотором исходном базисе  $\mathcal{B}$ :  $\bar{a}_k = \{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \dots, \alpha_n^k\}$ ,  $\forall k = \overline{1, m}$ , предварительно введем матрицу  $C_{n \times m}$ , столбцами которой являются наборы координат:

$$C = \|A_1 \ A_2 \ \dots \ A_m\|, \text{ где } A_k^T = (\alpha_1^k \ \alpha_2^k \ \dots \ \alpha_n^k).$$

Для матриц справедлива следующая общая теорема.

**Теорема 5.2.2** (о ранге матрицы)

Ранг  $r$  системы столбцов (строк) матрицы  $A$  равен рангу матрицы:

$$r = \text{rg } A. \tag{5.2.7}$$

Из теоремы следует, что ранги систем столбцов и строк матрицы равны, несмотря на то, что для прямоугольной матрицы размера

$m \times n$  они принадлежат разным пространствам  $\mathbb{R}^m$  и  $\mathbb{R}^n$  соответственно.

Отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы, называется **базисным**. Столбцы и строки, на пересечении которых располагаются элементы базисного минора, также называются **базисными**.

Таким образом, задача о выборе базиса линейного пространства связана с вычислением ранга матрицы, составленной из координат элементов, входящих в анализируемую систему. Элементы, координаты которых составляют базисные столбцы (строки), будут линейно-независимыми и в случае, если ранг системы равен размерности пространства, образуют базис пространства.

**Пример 5.2.3.** В линейном пространстве  $\mathcal{L}^3$  элементы заданы своими координатами в некотором базисе:

$$\mathbf{a}_1 = \{1, 0, 0\}, \mathbf{a}_2 = \{1, 1, 0\}, \mathbf{a}_3 = \{1, 1, 1\}, \mathbf{a}_4 = \{2, -1, 1\}.$$

Установить, является ли система  $\mathcal{A} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4\}$  полной. В случае ее полноты выбрать из элементов системы базис пространства.

*Решение*

Из заданных наборов координат, располагаемых в виде столбцов, составим матрицу  $C_{3 \times 4}$ :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $C$  имеет трапециевидную форму, поэтому ее ранг равен числу ненулевых строк:  $\text{rg} C = 3$ . Тогда, согласно теореме 5.2.2, ранг системы  $\mathcal{A}$  также равен 3. Он совпадает с размерностью линейного пространства, поэтому система элементов  $\mathcal{A}$  является полной.

Выберем из элементов системы  $\mathcal{A}$  базис пространства. Заметим, что крайний левый минор третьего порядка матрицы  $C$  равен 1 и отличен от нуля, а поэтому может быть выбран в качестве базисного минора. Столбцы базисного минора соответствуют базисным элементам. Таким образом, в качестве базиса пространства  $\mathcal{L}^3$  можно выбрать систему  $\mathcal{A}' = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$ .

■

## Лекция 12

### 5.3. Переход к другому базису

Для описания изменений, которые происходят с массивом координат элементов линейного пространства  $\mathcal{L}^n$  при переходе от одного базиса к другому, удобен язык матриц.

Введем следующие матрицы:

– *координатный столбец*  $X$ , составленный из координат элемента  $x$ :

$$\bar{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

– *базисную матрицу-строку*  $\bar{\mathcal{A}}$ , составленную из элементов базиса  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\} \Rightarrow \bar{\mathcal{A}} = \| a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \|.$$

Заметим, что хотя базисная матрица-строка  $\bar{\mathcal{A}}$  не представляет собой массив чисел, формально с ней будем выполнять все операции как с обычной матрицей. Тогда разложение элемента  $x$  по базису  $\mathcal{A}$  в матричной форме запишется как

$$x = \bar{\mathcal{A}} X. \quad (5.3.1)$$

Рассмотрим другой базис пространства  $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Каждый элемент  $b_k$  из базиса  $\mathcal{B}$ , в свою очередь, может быть разложен по базису  $\mathcal{A}$ :

$$b_k = \bar{\mathcal{A}} B_k,$$

где  $B_k$  – координатный столбец элемента  $b_k$ . Разложение всего базисного набора можно записать в виде:

$$\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{A}} B, \quad (5.3.2)$$

где  $B$  – матрица, составленная из координатных столбцов:

$$B = \| B_1 \ B_2 \ \dots \ B_n \|. \quad (5.3.3)$$

Матрицу  $B$  назовем **координатной матрицей базиса  $\mathcal{B}$** . Заметим, что матрица  $B$  невырождена (ее ранг равен размерности пространства  $n$ ), а значит, обратима.

Теперь рассмотрим два базиса  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$ , элементы которых задаются наборами координат в некотором третьем базисе  $\mathcal{B}_0$ . Запишем разложения базисных элементов по базису  $\mathcal{B}_0$  в матричной форме (5.3.2):

$$\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}_0 B; \quad \bar{\mathcal{B}}' = \bar{\mathcal{B}}_0 B'.$$

С учетом обратимости базисных координатных матриц  $B$  и  $B'$  находим:

$$\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}_0 B \Rightarrow \bar{\mathcal{B}}_0 = \bar{\mathcal{B}} B^{-1} \Rightarrow \bar{\mathcal{B}}' = \bar{\mathcal{B}} (B^{-1} B').$$

### Определение 5.3.1

Матрица

$$T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \equiv T = B^{-1} B', \quad (5.3.4)$$

где  $B$  и  $B'$  – координатные матрицы базисных систем  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$  в некотором базисе  $\mathcal{B}_0$ , называется *матрицей перехода* от базиса  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}'$ .

Таким образом, переход от базиса  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}'$  реализуется как соотношение между их базисными матрицами-строками:

$$\bar{\mathcal{B}}' = \bar{\mathcal{B}} T. \quad (5.3.5)$$

Соотношение для обратного перехода  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}$  не трудно получить из (5.3.5), умножив это равенство справа на обратную матрицу  $T^{-1}$ :

$$\bar{\mathcal{B}} = \bar{\mathcal{B}}' T^{-1}, \quad (5.3.6)$$

где

$$T^{-1} \equiv T_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = B'^{-1} B. \quad (5.3.7)$$

В приложениях часто встречается ситуация, когда необходимо перейти к новому базису  $\mathcal{B}'$ , элементы которого задаются координатами в первоначально заданном базисе  $\mathcal{B}$ . В этом случае  $\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}$ ,

и базисная координатная матрица  $B$  совпадает с единичной матрицей:  $B = E$ . Тогда из (5.3.4) для матрицы перехода имеем:

$$T = B', \quad (5.3.8)$$

т. е. она просто совпадает с координатной матрицей нового базиса.

**Пример 5.2.3.** Найти матрицу перехода  $T$  между базисами  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$  пространства  $\mathcal{L}^2$ , элементы которых заданы своими координатами в некотором базисе  $\mathcal{B}_0$ :

$$\mathcal{B}: \bar{b}_1 = \{1, 2\}, \bar{b}_2 = \{-2, 1\}; \quad \mathcal{B}': \bar{b}'_1 = \{3, -1\}, \bar{b}'_2 = \{1, 1\}.$$

*Решение.*

Из наборов координат, рассматриваемых как координатные столбцы, составим базисные координатные матрицы:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad B' = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Далее, по формуле (1.7.3) найдем обратную матрицу  $B^{-1}$ :

$$B^{-1} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрицу перехода от базиса  $\mathcal{B}$  к базису  $\mathcal{B}'$  определим по формуле (5.3.4):

$$T = B^{-1}B' = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Матрица  $T$  задает разложение элементов штрихованного базиса по нештрихованному, а ее столбцы, по существу, являются столбцами координат элементов из системы  $\mathcal{B}'$  в базисе  $\mathcal{B}$ :

$$\bar{b}'_1 = \frac{1}{5}\bar{b}_1 - \frac{7}{5}\bar{b}_2, \quad \bar{b}'_2 = \frac{3}{5}\bar{b}_1 - \frac{1}{5}\bar{b}_2.$$

■

Для установления соотношения между координатами элемента  $x$  в разных базисах  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$  запишем соответствующие разложения в матричной форме (5.3.1). С учетом равенства (5.3.5) имеем:

$$x = \bar{\mathcal{B}}X = \bar{\mathcal{B}}'X' \Rightarrow \bar{\mathcal{B}}X = \bar{\mathcal{B}}TX'.$$

В силу единственности разложения по базису из последнего равенства получаем:

$$X = T X', \quad (5.3.9)$$

или

$$X' = T^{-1} X. \quad (5.3.10)$$

**Пример 5.2.4.** Элемент  $x = \{3, 4\}$  задан своими координатами в базисе  $\mathcal{B}$  из примера 5.2.3. Найти его координаты в базисе  $\mathcal{B}'$  из того же примера.

*Решение*

Матрица перехода между базисами  $\mathcal{B}$  и  $\mathcal{B}'$  согласно решению примера 5.2.3 имеет вид:

$$T = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}.$$

Предварительно найдем обратную ей матрицу  $T^{-1}$ :

$$T^{-1} = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Тогда координаты элемента  $x$  в штрихованном базисе определим по формуле (5.3.10):

$$X' = T^{-1} X = \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 \\ 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -15/4 \\ 25/4 \end{vmatrix}.$$

Ответ:  $x = \left\{ -\frac{15}{4}, \frac{25}{4} \right\}$  в базисе  $\mathcal{B}'$ . ■

## 5.4. Линейные подпространства и операции над ними

### Определение 5.4.1

Линейным подпространством  $\mathcal{V}$  линейного пространства  $\mathcal{L}$  называется множество его элементов, которое само является линейным пространством относительно линейных операций, определенных в  $\mathcal{L}$ .

Отношение включения линейного подпространства  $\mathcal{V}$  в линейное пространство  $\mathcal{L}$  принято обозначать как  $\mathcal{V} \triangleleft \mathcal{L}$ .

Всякое линейное подпространство содержит общий нулевой элемент и замкнуто относительно линейных операций. В частности, один нулевой элемент сам составляет простейшее по составу линейное подпространство  $\mathcal{O} = \{0\}$ , которое называется **нулевым подпространством**.

**Пример 5.4.1.** Примерами линейных подпространств в пространстве геометрических векторов являются:

- множество коллинеарных векторов;
- множество компланарных векторов.

Множество всех векторов с равными модулями, например множество всех единичных векторов, линейное подпространство не образуют, так как оно не содержит нулевого элемента. ■

**Пример 5.4.2.** Примерами линейных подпространств в пространстве квадратных матриц  $M_{n \times n}$  порядка  $n$  являются:

- множество всех диагональных матриц;
- множество всех верхнетреугольных матриц.

Множество невырожденных матриц линейное подпространство не образуют, так как в нем отсутствует нулевой элемент. ■

**Пример 5.4.3.** В пространстве  $\mathbb{R}^n$  линейное подпространство образуют, например, все наборы, у которых компонента с номером  $k$  равна нулю. ■

**Пример 5.4.4.** Примерами линейных подпространств в пространстве многочленов степени не выше  $n$  являются:

- все многочлены степени не выше  $m < n$ ;
- все многочлены четной степени.

Многочлены нечетной степени линейное подпространство не образуют. ■

Выберем некоторое семейство элементов  $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  из элементов линейного пространства  $\mathcal{L}$ . Отметим, что произвольно отобранное семейство  $\mathcal{A}$  в общем случае линейное подпространство не образует.

### Определение 5.4.2

Линейной оболочкой  $[\mathcal{A}]$  семейства элементов  $\mathcal{A}$  из линейного пространства  $\mathcal{L}$  называется множество всех их линейных комбинаций:

$$[\mathcal{A}] = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_m \mathbf{a}_m\}.$$

### Теорема 5.4.1

Линейная оболочка  $[\mathcal{A}]$  всякого семейства элементов  $\mathcal{A}$  из линейного пространства  $\mathcal{L}$  является линейным подпространством:

$$[\mathcal{A}] \triangleleft \mathcal{L}.$$

Таким образом, линейные пространства содержат достаточно большое количество линейных подпространств. Теорема 5.4.1 позволяет строить линейные подпространства из любого набора элементов. Некоторые из возможных подпространств будут совпадать друг с другом, так как различные наборы элементов могут иметь одну и ту же линейную оболочку. При этом естественным образом возникает задача о разложении линейных пространств на подпространства по аналогии с разложением элементов по базису. Для ее решения введем операции над подпространствами.

Над линейными подпространствами как множествами элементов можно выполнять любые теоретико-множественные операции. В первую очередь, рассмотрим основные бинарные операции, выполняемые над парой линейных подпространств  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \triangleleft \mathcal{L}$ .

### Определение 5.4.3

Пересечением линейных подпространств  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2$ , где  $\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \triangleleft \mathcal{L}$ , называется множество всех их общих элементов:

$$\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}_1, \mathbf{x} \in \mathcal{V}_2\}.$$

### Свойства операции пересечения подпространств

Укажем следующие свойства операции пересечения подпространств:

I. Пересечение линейных подпространств является линейным подпространством:

$$\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2 \triangleleft \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 \triangleleft \mathcal{L}.$$

II. Для любых линейных подпространств справедливы соотношения:

1.  $\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_1$  (коммутативность)
2.  $\mathcal{V}_1 \cap (\mathcal{V}_2 \cap \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 \cap \mathcal{V}_2) \cap \mathcal{V}_3$  (ассоциативность)
3.  $\mathcal{V} \cap \mathcal{O} = \mathcal{O}$  ( $\mathcal{O}$  – нулевое подпространство)

Аналогично можно ввести и операцию объединения подпространств  $\mathcal{V}_1 \cup \mathcal{V}_2$ , как объединение множеств всех их элементов. Однако простое объединение в общем случае не сохраняет линейную структуру. Другими словами объединение линейных подпространств само линейным подпространством может и не являться.

**Пример 5.4.5.** Рассмотрим в пространстве геометрических векторов два линейных подпространства  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ , состоящих из векторов, коллинеарных векторам  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  соответственно, причем  $\bar{a} \nparallel \bar{b}$ .

Сумма  $\bar{a} + \bar{b}$  векторов из разных подпространств как вектор диагонали параллелограмма, построенного на векторах  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , не будет коллинеарна ни вектору  $\bar{a}$ , ни вектору  $\bar{b}$ , т. е.  $\bar{a} + \bar{b} \notin \mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ . Поэтому объединение наших подпространств  $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$  линейным подпространством не является. ■

#### Определение 5.4.4

Суммой  $\mathcal{U} + \mathcal{V}$  линейных подпространств  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  линейного пространства  $\mathcal{L}$ , называется множество всех сумм элементов из  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$ :

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = \{\mathbf{u} + \mathbf{v} \mid \mathbf{u} \in \mathcal{U}, \mathbf{v} \in \mathcal{V}\}.$$

#### Свойства операции сложения подпространств

Приведем следующие свойства операции сложения подпространств:

I. Сумма линейных подпространств является линейным подпространством:

$$\mathcal{U}, \mathcal{V} \triangleleft \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{U} + \mathcal{V} \triangleleft \mathcal{L}.$$

II. Сумма линейных подпространств  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  совпадает с линейной оболочкой их объединения:

$$\mathcal{U} + \mathcal{V} = [\mathcal{U} \cup \mathcal{V}].$$

III. Для любых линейных подпространств справедливы соотношения:

1.  $\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_1$  (коммутативность)
2.  $\mathcal{V}_1 + (\mathcal{V}_2 + \mathcal{V}_3) = (\mathcal{V}_1 + \mathcal{V}_2) + \mathcal{V}_3$  (ассоциативность)
3.  $\mathcal{V} + \mathcal{O} = \mathcal{V}$  ( $\mathcal{O}$  – нулевое подпространство)

**Пример 5.4.6.** В пространстве геометрических векторов  $\mathcal{L}^3$  возьмем три некопланарных вектора  $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ . Каждая пара векторов задает подпространство компланарных векторов:

$$\Pi_{ij} = \{ \bar{x} \mid \bar{x} = \mu \bar{a}_i + \nu \bar{a}_j, \mu, \nu \in \mathbb{R} \}. \quad (5.4.1)$$

Для подпространств  $\Pi_{13}$  и  $\Pi_{23}$  имеем:

$$\Pi_{13} \cap \Pi_{23} = \mathcal{V}_3,$$

$$\Pi_{13} + \Pi_{23} = \mathcal{L}^3,$$

где  $\mathcal{V}_3 = \{ \bar{x} = \lambda \bar{a}_3, \lambda \in \mathbb{R} \}$  – подпространство векторов, коллинеарных вектору  $\bar{a}_3$ .

Из соотношения для суммы подпространств следует, что любой вектор пространства  $\bar{c}$  может быть представлен в виде суммы векторов из  $\Pi_{13}$  и  $\Pi_{23}$ . Однако это представление не является единственным. Действительно, пусть

$$\bar{c} = \bar{u} + \bar{v},$$

где  $\bar{u} = \alpha \bar{a}_1 + \beta \bar{a}_3 \in \Pi_{13}$  и  $\bar{v} = \mu \bar{a}_2 + \nu \bar{a}_3 \in \Pi_{23}$ . Тогда тот же вектор можно представить и в виде другой аналогичной пары векторов, например,

$$\bar{u}' = \alpha \bar{a}_1 + (\beta - 1) \bar{a}_3 \in \Pi_{13} \quad \text{и} \quad \bar{v}' = \mu \bar{a}_2 + (\nu + 1) \bar{a}_3 \in \Pi_{23}.$$

■

#### Определение 5.4.5

Сумма линейных подпространств  $\mathcal{U}$  и  $\mathcal{V}$  называется *прямой суммой*, и обозначается как  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ , если их пересечение есть нулевое подпространство  $\mathcal{O}$ .

Для прямых сумм разложение элементов результирующего пространства на сумму элементов, принадлежащих подпространствам-слагаемым, единственно. Разложить линейное пространство в прямую сумму линейных подпространств можно, используя любой базис.

Пусть  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$  – некоторый базис линейного пространства  $\mathcal{L}^n$ . Линейные оболочки базисных элементов являются линейными подпространствами пространства  $\mathcal{L}^n$ :

$$\mathcal{V}_k = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{x} = \lambda \mathbf{b}_k, \lambda \in \mathbb{R}\} \triangleleft \mathcal{L}^n.$$

Тогда справедливо разложение

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{V}_n. \quad (5.4.2)$$

**Пример 5.4.7.** В пространстве геометрических векторов задана некоторая тройка некопланарных векторов  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$ . Найти разложения подпространств компланарных векторов  $\Pi_{kl}$  (5.4.1) на прямую сумму линейных подпространств.

*Решение*

Тройка некопланарных векторов образует базис пространства  $\mathcal{L}^3$ .

Векторы, коллинеарные базисным векторам, образуют линейные подпространства:

$$\mathcal{V}_k = \{\bar{x} \mid \bar{x} \parallel \bar{a}_k\} \triangleleft \mathcal{L}^3.$$

Так как  $\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_l = \mathcal{O}$  для  $\forall k \neq l$ , то для подпространств компланарных векторов  $\Pi_{kl}$  имеем

$$\Pi_{13} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_3, \quad \Pi_{12} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2, \quad \Pi_{23} = \mathcal{V}_2 \oplus \mathcal{V}_3.$$

■

В случае разложений пространств в прямые суммы размерность результирующего пространства равна сумме размерностей подпространств-слагаемых:

$$\dim(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V}. \quad (5.4.3)$$

При этом базис составляется как объединение базисных наборов.

Для размерности простой суммы подпространств имеет место общая **формула Грассмана**:

$$\dim(\mathcal{U} + \mathcal{V}) = \dim \mathcal{U} + \dim \mathcal{V} - \dim(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}). \quad (5.4.4)$$

**Пример 5.4.8.** показать, что в геометрическом пространстве любые два различных подпространства компланарных векторов  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  имеют общий набор коллинеарных векторов.

*Решение*

Как было указано в решении примера 5.4.6, сумма различных подпространств компланарных векторов совпадает со всем пространством геометрических векторов:  $\Pi_1 + \Pi_2 = \mathcal{L}^3$ . Тогда для размерностей подпространств имеем:

$$\dim \Pi_1 = \dim \Pi_2 = 2; \quad \dim(\Pi_1 + \Pi_2) = 3.$$

Используя формулу Грассмана (5.4.3), находим:

$$\dim(\Pi_1 \cap \Pi_2) = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 - \dim(\Pi_1 + \Pi_2) = 2 + 2 - 3 = 1.$$

Таким образом, пересечение подпространств  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  одномерно, а значит, состоит из множества коллинеарных векторов. ■

## Лекция 13

### 5.5. Линейные операторы

Пусть имеются два линейных пространства  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , возможно содержащие объекты различной природы.

*Определение 5.5.1*

Линейным оператором  $\hat{A}$ , действующим из пространства  $\mathcal{L}_1$  в пространство  $\mathcal{L}_2$ , называется всякое правило, позволяющее сопоставить любому элементу  $\mathbf{x}$  из  $\mathcal{L}_1$  единственный элемент  $\mathbf{v}$  из  $\mathcal{L}_2$  так, чтобы для  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_1$  и  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$  выполнялись соотношения:

$$\hat{A}[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \hat{A}[\mathbf{x}] + \hat{A}[\mathbf{y}] \quad (\text{аддитивность}) \quad (5.5.1)$$

$$\hat{A}[\lambda \mathbf{x}] = \lambda \hat{A}[\mathbf{x}] \quad (\text{однородность}) \quad (5.5.2)$$

Результирующий элемент  $\mathbf{v} = \hat{A}[\mathbf{x}]$  называется *образом*  $\mathbf{x}$ , а сам элемент  $\mathbf{x}$  называется *прообразом*  $\mathbf{v}$ .

Понятие *образа* расширяется на любое подмножество  $\mathcal{X}$  элементов из  $\mathcal{L}_1$ :

$$\mathcal{Y} = \hat{A}[\mathcal{X}] = \{\mathbf{v} \mid \mathbf{v} = \hat{A}[\mathbf{x}], \forall \mathbf{x} \in \mathcal{X}\},$$

в том числе и на все пространство  $\mathcal{L}_1$ .

### Определение 5.5.2

Образом  $\text{Im } \hat{A}$  линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  называется образ пространства  $\mathcal{L}_1$ :

$$\text{Im } \hat{A} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{L}_2 \mid \mathbf{v} = \hat{A}[\mathbf{x}], \mathbf{x} \in \mathcal{L}_1\}.$$

В случае различных пространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  говорят, что линейный оператор  $\hat{A}$  задает *отображение*  $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ . Важнейшим типом отображений является изоморфизм линейных пространств, рассмотренный в параграфе 2 главы 5. Если же линейные пространства совпадают и оператор  $\hat{A}$  действует в одном пространстве  $\mathcal{L}$ , то говорят, что  $\hat{A}$  задает *преобразование* пространства. Примерами линейных преобразований, например, геометрического пространства, являются повороты вокруг осей, осевые и зеркальные симметрии, проекции на различные подпространства.

Линейный оператор  $\hat{A}$  может быть определен не на всем пространстве  $\mathcal{L}_1$ , а только на его некотором подпространстве  $\mathcal{U} \triangleleft \mathcal{L}_1$ . Тогда подпространство  $\mathcal{U}$  есть *область определения оператора*  $\hat{A}$ .

**Пример 5.5.1. Нулевой оператор.** Выяснить, является ли *нулевой оператор*  $\hat{O}$ , отображающий все элементы пространства  $\mathcal{L}_1$  в нулевой элемент пространства  $\mathcal{L}_2$ :  $\hat{O}[\mathbf{x}] = \mathbf{0}$ , линейным оператором.

#### Решение

Проверим выполнение соотношений (5.5.1) и (5.5.2) для произвольных элементов  $x$  и  $y$  из пространства  $\mathcal{L}_1$ :

$$\hat{O}[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \mathbf{0}; \quad \hat{O}[\mathbf{x}] + \hat{O}[\mathbf{y}] = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{O}[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \hat{O}[\mathbf{x}] + \hat{O}[\mathbf{y}];$$

$$\hat{O}[\lambda \mathbf{x}] = \mathbf{0}; \quad \lambda \hat{O}[\mathbf{x}] = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0} \Rightarrow \hat{O}[\lambda \mathbf{x}] = \lambda \hat{O}[\mathbf{x}].$$

Соотношения (5.5.1) и (5.5.2) выполняются для  $\forall x, y \in \mathcal{L}_1$  и  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , поэтому нулевой оператор является линейным оператором. ■

**Пример 5.5.2. Тождественный оператор.** Выяснить, является ли тождественный оператор  $\hat{I}[x] = x$ , действующий в одном линейном пространстве  $\hat{I}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , линейным оператором.

*Решение*

Проверим выполнение соотношений (5.5.1) и (5.5.2) для произвольных элементов  $x$  и  $y$  из пространства  $\mathcal{L}$ :

$$\hat{I}[x + y] = x + y; \quad \hat{I}[x] + \hat{I}[y] = x + y \Rightarrow \hat{I}[x + y] = \hat{I}[x] + \hat{I}[y];$$

$$\hat{I}[\lambda x] = \lambda x; \quad \lambda \hat{I}[x] = \lambda x \Rightarrow \hat{I}[\lambda x] = \lambda \hat{I}[x].$$

Таким образом, тождественный оператор является линейным оператором. ■

### Определение 5.5.3

Ядром  $\ker \hat{A}$  линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  называется множество всех элементов из  $\mathcal{L}_1$ , которые оператор отображает в нулевой элемент  $\mathbf{0}_2$  пространства  $\mathcal{L}_2$ :

$$\ker \hat{A} = \{x \in \mathcal{L}_1 \mid \hat{A}[x] = \mathbf{0}_2 \in \mathcal{L}_2\}.$$

В частности, ядро нулевого оператора  $\hat{O}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  совпадает с пространством  $\mathcal{L}_1$ , а его образ содержит только один нулевой элемент:

$$\ker \hat{O} = \mathcal{L}_1, \quad \text{Im} \hat{O} = \{\mathbf{0}_2\}.$$

### Свойства линейных операторов

Отметим следующие свойства линейных операторов:

I. Линейный оператор  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  отображает нулевой элемент пространства  $\mathcal{L}_1$  в нулевой элемент пространства  $\mathcal{L}_2$ :

$$\hat{A}: [\mathbf{0}_1] = \mathbf{0}_2.$$

II. Линейный оператор  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  отображает противоположный элемент  $-\mathbf{x}$  в противоположный элемент  $-\mathbf{v}$  образа:

$$\hat{A}[-\mathbf{x}] = -\mathbf{v} = -\hat{A}[\mathbf{x}].$$

III. Прообраз  $\mathcal{X}$  системы линейно независимых элементов  $\mathcal{V}$  из  $\mathcal{L}_2$  является линейно независимой системой.

IV. Ядро линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  является линейным подпространством:

$$\ker \hat{A} \triangleleft \mathcal{L}_1.$$

V. Образ  $\mathcal{V} = \hat{A}[\mathcal{U}]$  любого линейного подпространства  $\mathcal{U} \triangleleft \mathcal{L}_1$  является линейным подпространством.

VI. Образ линейного оператора  $\text{Im } \hat{A}$  является линейным подпространством:

$$\text{Im } \hat{A} \triangleleft \mathcal{L}_2.$$

Так как ядро и образ линейного оператора являются линейными подпространствами пространств  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  соответственно, то они обладают определенными размерностями.

#### Определение 5.5.4

Дефектом линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  называется размерность его ядра  $\ker \hat{A}$ .

#### Определение 5.5.5

Рангом линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  называется размерность его образа  $\text{Im } \hat{A}$ .

#### Теорема 5.5.1

Сумма ранга и дефекта линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$  равна размерности пространства  $\mathcal{L}_1$ :

$$\dim \ker \hat{A} + \dim \text{Im } \hat{A} = \dim \mathcal{L}_1. \quad (5.5.3)$$

**Пример 5.5.3.** Определить ранг и дефект: а) нулевого оператора; б) тождественного оператора.

### Решение

Для задания а): ранг нулевого оператора  $\hat{O}$  равен 0, а его дефект совпадает с размерностью пространства, на котором он действует.

Для задания б): ранг тождественного оператора  $\hat{I}$  равен размерности пространства, на котором оператор действует, а его дефект равен 0. ■

Изоморфизм между конечномерными линейными и арифметическими пространствами, отмеченный в параграфе 3 главы 5, предполагает, что действие линейного оператора  $\hat{A}: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$  можно представить как отображение наборов координат векторов в фиксированных базисах пространств  $\mathcal{U}^n$  и  $\mathcal{V}^m$ . Для установления явного вида этого отображения необходимо, в первую очередь, выяснить, как действует оператор  $\hat{A}: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$  на основные структурные элементы пространства  $\mathcal{U}^n$  – базисную систему.

Зафиксируем в пространствах  $\mathcal{U}^n$  и  $\mathcal{V}^m$  базисы:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\} \text{ и } \mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m\}.$$

Далее разложим образ базисного элемента  $\mathbf{u}_k$  по базису  $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$ :

$$\hat{A}[\mathbf{u}_k] = a_{1k}\mathbf{v}_1 + a_{2k}\mathbf{v}_2 + \dots + a_{mk}\mathbf{v}_m = \overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{V}} A_k, \quad k = \overline{1, n},$$

где  $A_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \dots \\ a_{mk} \end{pmatrix}$  – координатный столбец образа.

Тогда действие оператора  $\hat{A}$  на всю базисную систему  $\mathcal{B}_{\mathcal{U}}$  можно записать в следующей матричной форме:

$$\hat{A}[\mathcal{B}_{\mathcal{U}}] = \overline{\mathbf{B}}_{\mathcal{V}} A, \quad (5.5.4)$$

где

$$A = \| A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n \|, \quad (5.5.5)$$

т. е.  $A$  – матрица, составленная из координатных столбцов образов. При этом действие оператора  $\hat{A}$  на произвольный элемент  $\mathbf{x}$  из про-

пространства  $\mathcal{U}^n$  сводится к простому умножению матрицы  $A$  на столбец координат  $X$ :

$$y = \hat{A}[x] \Rightarrow Y = AX. \quad (5.5.6)$$

Матрица  $A_{m \times n}$  (5.5.5) называется матрицей линейного оператора  $\hat{A}$ . Справедливо следующее общее утверждение.

### Теорема 5.5.3

Любому линейному оператору  $\hat{A}: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$  действующему в конечномерных линейных пространствах  $\mathcal{U}^n$  и  $\mathcal{V}^m$ , соответствует матрица размера  $m \times n$ . И наоборот, любая матрица размера  $m \times n$  задает некоторый линейный оператор  $\hat{A}: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$ .

Так как матрица линейного оператора определяется по действию его на базисную систему, то при смене базисов пространств будет меняться и сама матрица. Используя соотношение (5.5.6), установим правило этих изменений:

$$Y = AX \Rightarrow SY' = ATX' \Rightarrow Y' = (S^{-1}AT)X' \equiv A'X',$$

или

$$A' = S^{-1}AT, \quad (5.5.7)$$

где  $T$  и  $S$  – матрицы перехода к новым базисам  $\mathcal{B}'_{\mathcal{U}}$  и  $\mathcal{B}'_{\mathcal{V}}$  соответственно.

Важнейшим типом линейных операторов являются операторы, действующие в одном пространстве  $\hat{A}: \mathcal{U}^n \rightarrow \mathcal{V}^m$ .

В этом случае они, по существу, задают некоторое преобразование элементов пространства. Матрицы таких операторов квадратные, а закон их изменения при смене базиса (5.5.7) принимает вид:

$$A' = T^{-1}AT. \quad (5.5.8)$$

### Определение 5.5.6

Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  порядка  $n$  называются *подобными*, если найдется невырожденная матрица  $C$  того же порядка, такая, что

$$B = C^{-1}AC. \quad (5.5.9)$$

Отношение подобия матриц обозначается как  $A \sim B$ .

Подобные матрицы являются представлениями одного и того же линейного оператора, но в разных базисах. В случае, если одна из подобных матриц диагональна, то о второй матрице говорят, что она может быть диагонализирована в некотором базисе. Диагонализация матриц является важнейшим типом их преобразований, позволяющий решать широкий круг прикладных задач.

### Основные свойства подобных матриц

Укажем основные свойства подобных матриц:

I. Отношение подобия матриц есть отношение эквивалентности:

1.  $A \sim A$  (рефлексивность)
2.  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$  (симметричность)
3.  $A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$  (транзитивность)

II. Если  $A \sim B$ , то

$$\det A = \det B;$$

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} B.$$

### Пример 5.5.4. Оператор параллельного проецирования.

Пусть линейное пространство  $\mathcal{L}$  разложено в прямую сумму линейных подпространств:

$$\mathcal{L} = \mathcal{U}^l \oplus \mathcal{V}^m,$$

где  $l + m = n = \dim \mathcal{L}$ . Тогда любой элемент  $x$  из  $\mathcal{L}$  единственным образом может быть представлен в виде суммы:

$$x = u_x + v_x,$$

где  $u_x \in \mathcal{U}^l$ ,  $v_x \in \mathcal{V}^m$ . Сопоставляя элементу  $x$  его  $v$ -компоненту, мы тем самым определим оператор  $\hat{P}[x]$ , отображающий пространство  $\mathcal{L}$  в его подпространство  $\mathcal{V}$ .

#### Определение 5.5.7

Оператор  $\hat{P}: \mathcal{L} = \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$ , определенный как

$$\hat{P}[x] = v_x, \quad (5.5.10)$$

называется *оператором проецирования* в подпространство  $\mathcal{V}$  параллельно подпространству  $\mathcal{U}$ .

Оператор параллельного проецирования (5.5.10) принято обозначать как  $\hat{P}_{\mathcal{U}||\mathcal{V}}$ .

Далее зафиксируем в подпространствах  $\mathcal{U}^l$  и  $\mathcal{V}^k$  базисы:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l\}, \quad \mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Базис полного пространства  $\mathcal{L}$  образуем путем их слияния:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_l; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k\}.$$

Тогда в базисе  $\mathcal{B}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}}$  матрица оператора параллельного проецирования  $P_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}$  имеет вид:

$$P_{\mathcal{V}||\mathcal{U}} = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} l \\ \left. \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix} \right\} k \end{matrix} \quad (5.5.11)$$

Матрицу оператора параллельного проецирования в произвольном базисе  $\mathcal{B}'$  получим из матрицы (5.5.11) с помощью преобразования подобия:

$$P'_{\mathcal{V}||\mathcal{U}} = T^{-1} P_{\mathcal{V}||\mathcal{U}} T, \quad (5.5.12)$$

где  $T$  – матрица перехода от базиса  $\mathcal{B}_{\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}}$  к базису  $\mathcal{B}'$ . ■

**Пример 5.5.5.** Найти проекцию точки  $M_1(-1, 1, 2)$  на плоскость  $\pi$  параллельно вектору  $\bar{l} = \{2, 1, 0\}$ , если плоскость  $\pi$  параллельна векторам  $\bar{a} = \{3, 1, 1\}$ ,  $\bar{b} = \{-1, 0, 2\}$  и проходит через точку  $M_0(1, 2, 1)$ . Точки и векторы заданы своими координатами в некоторой системе координат  $\langle O, \mathcal{B}_0 \rangle$ .

*Решение*

Проекцию  $M'_1$  точки  $M_1$  на плоскость  $\pi$  можно найти просто как точку пересечения плоскости  $\pi$  и прямой с направляющим вектором  $\bar{l}$ , проходящей через точку  $M_1$ , используя параметрическое уравнение прямой и общее уравнение плоскости (рис. 5.1).

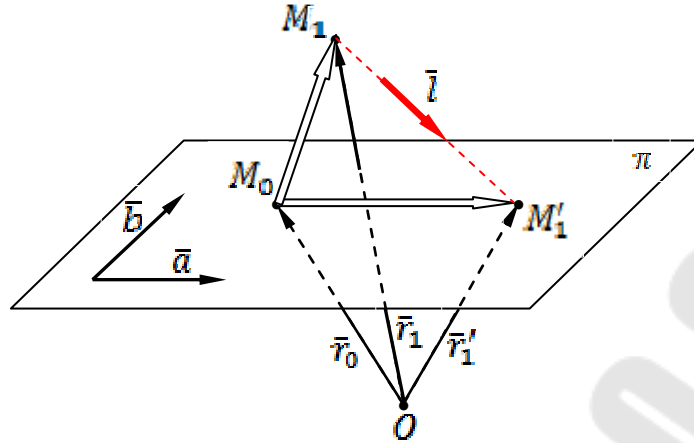


Рис. 5.1. Проекция точки  $M_1$  на плоскость  $\pi$  параллельно вектору  $\bar{l}$

Тем не менее с целью иллюстрации эффективности общего подхода к проецированию, основанного на теории линейных операторов, и который применим не только к геометрическим задачам, но и к задачам, в которых основные объекты имеют негеометрическую природу, воспользуемся результатами примера 5.5.4.

Рассмотрим в пространстве геометрических векторов  $\mathcal{V}$  следующие линейные подпространства:

- подпространство  $\Pi_{ab}$  векторов, компланарных с векторами  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ ;
- подпространство  $\mathcal{L}_l$  векторов, коллинеарных вектору  $\bar{l}$ .

Так как векторы  $\bar{l}$ ,  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  некопланарны, в чем нетрудно убедиться, вычислив определитель, составленный из их столбцовоординат, то  $\bar{l} \notin \Pi_{ab}$ , и имеет место разложение:  $\mathcal{V} = \mathcal{L}_l \oplus \Pi_{ab}$ . В качестве базисов подпространств  $\mathcal{L}_l$  и  $\Pi_{ab}$  возьмем системы  $\mathcal{B}_l = \{\bar{l}\}$  и  $\mathcal{B}_{ab} = \{\bar{a}, \bar{b}\}$  соответственно. Тогда объединенная система  $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\bar{l}, \bar{a}, \bar{b}\}$  будет базисом всего пространства  $\mathcal{V}$ .

Матрица проецирования пространства  $\mathcal{V}$  в подпространство  $\Pi_{ab}$  параллельно подпространству  $\mathcal{L}_l$  в базисе  $\mathcal{B}_{\mathcal{V}}$  имеет вид:

$$P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для определения ее вида в исходном базисе  $\mathcal{B}_0$  выпишем сначала матрицу перехода  $T_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_\nu}$  от базиса  $\mathcal{B}_0$  к базису  $\mathcal{B}_\nu$ , взяв в качестве ее столбцов столбцы координат векторов  $\bar{l}$ ,  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$ , заданных по условию:

$$T_{\mathcal{B}_0 \rightarrow \mathcal{B}_\nu} \equiv S = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

С помощью стандартного алгоритма найдем обратную матрицу:

$$S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Обратная матрица задает переход от базиса  $\mathcal{B}_\nu$  к базису  $\mathcal{B}_0$ , поэтому

$$T_{\mathcal{B}_\nu \rightarrow \mathcal{B}_0} = S^{-1}.$$

С учетом этого соотношения по формуле (5.5.12) находим матрицу параллельного проецирования в исходном базисе:

$$\begin{aligned} P_0 &= (S^{-1})^{-1} P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} S^{-1} = S P_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l} S^{-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow P_0 &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \begin{vmatrix} -2 & 7 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Выберем в качестве элемента пространства  $\mathcal{V}$  вектор  $\overline{M_0 M_1}$ :

$$\overline{M_0 M_1} = \bar{r}_1 - \bar{r}_0 = \{-2, -1, 1\}.$$

Оператор проецирования  $\hat{P}_{\Pi_{ab} \parallel \mathcal{L}_l}$  переводит этот вектор в вектор  $\overline{M_0 M_1'}$  (рис. 5.1), координаты которого согласно формуле (5.5.6) получим, умножив матрицу  $P_0$  на столбец координат вектора  $\overline{M_0 M_1}$ :

$$X_{\overline{M_0 M_1'}} = P_0 X_{\overline{M_0 M_1}} \Rightarrow X_{\overline{M_0 M_1'}} = \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 7 & -14 & 2 \\ 2 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 1 \end{vmatrix}.$$

Наконец, координаты искомой точки  $M_1'$  найдем как координаты ее радиус-вектора  $\vec{r}_1'$ :

$$\vec{r}_1' = \vec{r}_0 + \overline{M_0M_1'} = \left\{ 1 + \frac{2}{3}, 2 + \frac{1}{3}, 1 + 1 \right\} = \left\{ \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2 \right\} \Rightarrow M_1' \left( \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2 \right).$$

Ответ:  $M_1' \left( \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 2 \right)$ . ■

## Лекция 14

### 5.6. Собственные векторы и собственные значения

Рассмотрим линейный оператор  $\hat{A}: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ , действующий в одном конечномерном линейном пространстве  $\mathcal{L}$ .

#### Определение 5.6.1

Линейное подпространство  $\mathcal{U} \triangleleft \mathcal{L}$  называется *инвариантным подпространством* для оператора  $\hat{A}$ , если образ каждого элемента  $\mathbf{x}$  из  $\mathcal{U}$  также принадлежит  $\mathcal{U}$ :

$$\forall \mathbf{x} \in \mathcal{U} \Rightarrow \hat{A}[\mathbf{x}] \in \mathcal{U}.$$

#### Свойства инвариантных подпространств

Приведем основные свойства инвариантных подпространств:

I. Для нулевого  $\hat{O}$  и тождественного  $\hat{I}$  операторов инвариантными являются любые подпространства линейного пространства  $\mathcal{L}$ .

II. Для любого линейного оператора  $\hat{A}$  ядро  $\ker \hat{A}$  и образ  $\text{Im } \hat{A}$  являются его инвариантными подпространствами:

$$\hat{A}[\ker \hat{A}] = \{0\} \triangleleft \ker \hat{A};$$

$$\hat{A}[\text{Im } \hat{A}] \triangleleft \text{Im } \hat{A}.$$

III. Если  $n$ -мерное пространство  $\mathcal{L}^n$  представлено в виде прямой суммы ненулевых инвариантных относительно действия линейного оператора  $\hat{A}$  подпространств

$$\mathcal{L}^n = \mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{U}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{U}_k,$$

то существует базис пространства  $\mathcal{L}^n$ , в котором матрица оператора  $\hat{A}$  имеет блочно-диагональный вид:

$$A = \left\| \begin{array}{cccc} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_k \end{array} \right\|. \quad (5.6.1)$$

Заметим, что квадратный блок  $A_i$  в матрице (5.6.1) имеет порядок равный размерности соответствующего инвариантного подпространства  $\mathcal{U}_i$ . Поэтому в случае, когда в разложении пространства все инвариантные подпространства оператора  $\hat{A}$  одномерны, свойство III решает проблему диагонализации матриц. Поиск элементов, генерирующих одномерные инвариантные подпространства, является основной задачей теории линейных операторов и ее многочисленных приложений.

#### Определение 5.6.2

*Ненулевой элемент  $x$  из  $\mathcal{L}$  называется собственным вектором линейного оператора  $\hat{A}$  если найдется действительное число  $\lambda$  такое, что*

$$\hat{A}[x] = \lambda x. \quad (5.6.2)$$

При этом число  $\lambda$  называется *собственным значением* оператора  $\hat{A}$  соответствующим собственному вектору  $x$ . Множество *всех* собственных значений называется *спектром* оператора.

#### Общие свойства собственных векторов

Отметим общие свойства собственных векторов:

I. Любой собственный вектор оператора  $\hat{A}$  генерирует инвариантное относительно действия оператора одномерное подпространство, совпадающее с линейной оболочкой элемента.

II. Собственные векторы линейного оператора, соответствующие *различными* собственным значениям, линейно независимы.

Множество *всех* собственных векторов, соответствующих одному собственному значению  $\lambda$  линейного оператора  $\hat{A}$ , является линейным подпространством  $\mathcal{L}_\lambda \triangleleft \mathcal{L}$ .

Если в линейном пространстве  $\mathcal{L}^n$  имеется базис  $\mathcal{B}_{\hat{A}}$ , составленный из собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , то в этом базисе матрица оператора  $A$  имеет диагональный вид:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (5.6.3)$$

где  $\lambda_k$  – собственное значение оператора  $\hat{A}$ , соответствующее собственному вектору  $\mathbf{x}_k$ , входящему в базисную систему.

Не любой линейный оператор имеет действительные собственные значения, а значит, и одномерные инвариантные подпространства. Для поиска возможных собственных значений и соответствующих им собственных векторов зафиксируем в линейном пространстве  $\mathcal{L}$  базис  $\mathcal{B}$ . Далее запишем операторное равенство (5.6.2) в матричной форме:

$$AX = \lambda X \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0, \quad (5.6.4)$$

где  $A$  – матрица оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathcal{B}$ . Равенство (5.6.3) представляет собой однородную линейную систему относительно координат собственного вектора. Согласно теореме 2.2.2, для того чтобы система (5.6.4) имела ненулевые решения, она должна быть вырожденной, т. е. определитель ее матрицы коэффициентов должен равняться нулю:

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (5.6.5)$$

### Определение 5.6.3

Уравнение (5.6.5) называется *характеристическим уравнением*, а матрица  $A - \lambda E$  – *характеристической матрицей* линейного оператора  $\hat{A}$  в фиксированном базисе  $\mathcal{B}$ .

После вычисления определителя мы получим в случае  $n$ -мерного пространства алгебраическое уравнение  $n$ -й степени относительно  $\lambda$ .

Согласно *основной теореме алгебры*, любое алгебраическое уравнение  $n$ -й степени на множестве комплексных чисел имеет ровно  $n$  корней с учетом их кратности. Поэтому в комплексных линейных

пространствах любой линейный оператор имеет полный набор одномерных инвариантных подпространств, а значит, любая квадратная матрица, поскольку она задает некоторый линейный оператор, может быть диагонализирована.

В действительных линейных пространствах оператор может и не иметь действительных собственных значений, а значит, не любая квадратная матрица может быть диагонализирована. В этом случае ставится задача по поиску ее простейшей блочно-диагональной формы типа (5.6.1).

**Пример 5.6.1.** Найти собственные значения и собственные векторы оператора параллельного проецирования  $\hat{P}_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}$ , действующего в линейном пространстве  $\mathcal{L} = \mathcal{U}^l \oplus \mathcal{V}^m$ .

*Решение*

В первую очередь, заметим, что повторное действие оператора проецирования результат, полученный при первом проецировании, изменить уже не может. Таким образом, для любых операторов проецирования справедливо следующее операторное равенство:

$$\hat{P}^2 = \hat{P}. \quad (5.6.6)$$

Далее, действуя оператором проецирования на его собственный вектор  $\mathbf{x}$ , с учетом этого равенства (и линейности оператора) последовательно находим:

$$\hat{P}^2[\mathbf{x}] = \hat{P}[\mathbf{x}] \Rightarrow \lambda^2 \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow \lambda(\lambda - 1)\mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Согласно определению 5.6.2,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , поэтому либо  $\lambda = 0$ , либо  $\lambda = 1$ . Пусть  $\lambda = 0$ . Тогда

$$\hat{P}_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}[\mathbf{x}] = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{v}_x = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{u}_x + \mathbf{0} = \mathbf{u}_x \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{U}.$$

Для  $\lambda = 1$  получаем:

$$\hat{P}_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}[\mathbf{x}] = \lambda \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{v}_x = \mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathcal{V}.$$

Таким образом, оператор параллельного проецирования  $\hat{P}_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}$  имеет два различных собственных значения:  $\lambda_1 = 0$  и  $\lambda_2 = 1$ . При этом собственным вектором оператора  $\hat{P}_{\mathcal{V}||\mathcal{U}}$  соответствующим собственному значению  $\lambda_1 = 0$ , является любой ненулевой элемент из подпро-

пространства  $\mathcal{U}$ , т. е. элемент, задающий направление проецирования, а собственным вектором, соответствующим собственному значению  $\lambda_2 = 1$  – любой ненулевой элемент из подпространства  $\mathcal{V}$ . ■

**Пример 5.6.2.** Установить, можно ли матрицу

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

диагонализировать с помощью преобразования подобия.

*Решение*

Будем считать заданную квадратную матрицу  $A$  матрицей некоторого линейного оператора  $\hat{A}$ , действующего в абстрактном пространстве  $\mathcal{L}^3$ , записанной в фиксированном базисе  $\mathcal{B}_0$ . Для определения собственных значений этого оператора составим и решим характеристическое уравнение (5.6.5):

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda-3) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 3.$$

Так как характеристическое уравнение имеет ровно три действительных корня (с учетом их кратности), то, во-первых, существует базис пространства  $\mathcal{L}^3$ , составленный из собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , а, во-вторых, в этом базисе матрица оператора, согласно общему свойству собственных векторов IV, имеет диагональный вид (5.6.3). Другими словами, заданная матрица  $A$  может быть диагонализирована с помощью некоторого преобразования подобия. Причем результат можно записать сразу и без конкретизации базиса (но только после упорядочивания множества собственных значений). В нашем случае имеем:

$$A' = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Безусловно, полное решение задачи предполагает представление явного вида преобразования, диагонализующего матрицу. Для этого необходимо сначала выделить множества собственных векторов, соответствующих различным собственным значениям, а затем составить из них базис всего пространства.

Подставляя в матричное уравнение (5.6.3) первое значение  $\lambda = 0$ , для координат  $x, y, z$  соответствующих собственным векторам получаем:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases} \Rightarrow x + y + z = 0.$$

Таким образом, ранг системы равен 1, а множество решений представляет собой дважды параметрическое семейство (в соответствии с кратностью собственного значения  $\lambda = 0$ ):

$$\begin{cases} x = -u - v, \\ y = u, \\ z = v. \end{cases}$$

В качестве фундаментальной системы решений, которая войдет в базис полного пространства, можно выбрать любую пару линейно независимых решений, например:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Линейная независимость данной пары очевидна, так как координаты векторов не пропорциональны друг другу. Но в общем случае она легко устанавливается путем вычисления ранга их координатной матрицы (ранг координатной матрицы должен равняться числу векторов в системе).

Для собственного значения  $\lambda = 3$  получаем:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0, \\ x - 2y + z = 0, \\ x + y - 2z = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = z, \\ y = z. \end{cases}$$

Здесь ранг системы равен 2, а множество решений представляет собой одно параметрическое семейство:

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ z = t. \end{cases}$$

В качестве фундаментального решения можно выбрать любое ненулевое решение, например:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Система векторов  $\mathcal{B} = \{x_1, x_2, x_3\}$  образует базис полного пространства  $\mathcal{L}^3$ , а координатная матрица этой системы определяет искоемое преобразование подобия:

$$C = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

С целью проверки правильности вычислений предварительно с помощью стандартной процедуры находим обратную матрицу:

$$C^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее, выполняя непосредственно преобразование подобия (5.5.9), получаем:

$$A' = C^{-1}AC = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

что совпадает с заявленным ранее результатом.

Важно отметить, что преобразование (а конкретно – выбор матрицы  $C$ ), диагонализующее матрицу  $A$ , не является однозначно определенным. Выбор любого другого базиса, составленный из собственных векторов оператора  $\hat{A}$ , решает задачу диагонализации. Однако результирующая диагональная матрица не изменится, несмотря на то, что матрицы, определяющие преобразование подобия  $C$ , будут отличаться друг от друга. Этот факт находит свое фундаментальное обоснование в специальном разделе высшей алгебры, называемом теорией групп.

■

## ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 5

**194.** Являются ли линейными пространствами: а) пустое множество  $\emptyset$ ; б) множество, состоящее из одного нулевого элемента?

**195.** Являются ли линейными пространствами над полем  $\mathbb{R}$  множества: а) рациональных чисел; б) иррациональных чисел?

**196.** Является ли линейным пространством множество квадратных матриц порядка  $n$ ?

**197.** Установить, являются ли линейными подпространствами заданные множества векторов в  $n$  мерном векторном пространстве  $V$ , и если являются, то найти их размерность:

а) множество векторов, все координаты которых равны между собой;

б) множество векторов, первая координата которых равна 0;

в) множество векторов, сумма координат которых равна 0;

г) множество векторов плоскости, параллельных между собой.

**198.** Установить, образует ли указанное множество функций на произвольном отрезке  $[a, b]$  линейное пространство относительно обычных операций сложения и умножения на действительное число  $\lambda$ :

а) множество непрерывных функций;

б) множество дифференцируемых функций;

в) множество интегрируемых функций.

**199.** Найти матрицу перехода от базиса  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3, \bar{e}_4$  к базису  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3, \bar{e}'_4$ , если

а)  $\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 + 3\bar{e}_4$ ;  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + 3\bar{e}_3 + \bar{e}_4$ ;  $\bar{e}'_3 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ ;  $\bar{e}'_4 = \bar{e}_1$ ;

б)  $\bar{e}'_1 = \bar{e}_3$ ;  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_4$ ;  $\bar{e}'_3 = \bar{e}_1$ ;  $\bar{e}'_4 = \bar{e}_2$ .

**200.** В пространстве  $R_3(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  найти матрицу перехода от базиса  $\bar{e}_1 = 1$ ,  $\bar{e}_2 = x$ ,  $\bar{e}_3 = x^2$ ,  $\bar{e}_4 = x^3$  к базису  $\bar{e}'_1 = 1$ ,  $\bar{e}'_2 = (x-2)$ ,  $\bar{e}'_3 = (x-2)^2$ ,  $\bar{e}'_4 = (x-2)^4$ .

**201.** Найти координаты вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2$ , если известны координаты вектора в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2$ :

а)  $\bar{x} = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_2$ ;  $\bar{e}'_1 = 5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2$ ;  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ ;

б)  $\bar{x} = 2\bar{e}_1 - 5\bar{e}_2$ ;  $\bar{e}'_1 = 3\bar{e}_1 - 4\bar{e}_2$ ;  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$ .

**202.** Найти координаты вектора  $\bar{x}$  в базисе  $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ , если известны координаты вектора в базисе  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ .

а)  $\bar{x}(-1, 2, 7)$ ;  $\bar{e}'_1 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$ ,  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3$ ,  
 $\bar{e}'_3 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 5\bar{e}_3$ ;

б)  $\bar{x}(1, 2, 3)$ ;  $\bar{e}'_1 = 2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$ ,  $\bar{e}'_2 = \bar{e}_1 + \bar{e}_3$ ;  $\bar{e}'_3 = \bar{e}_2 - \bar{e}_3$ .

**203.** Является ли линейным каждый из операторов  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , заданный следующим образом ( $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ):

а)  $f(\alpha) = 2^\alpha$ ; б)  $f(\alpha) = 2\alpha + 5$ ; в)  $f(\alpha) = \alpha^3$ ; г)  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{5}$ .

**204.** Является ли линейным оператор  $f$ , переводящий всякий вектор  $x(\alpha_1, \alpha_2)$  в вектор  $y$ , заданный координатами в том же базисе, если:

а)  $y(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2)$ ; б)  $y(\alpha_1; \alpha_1 \cdot \alpha_2)$ ;

в)  $y(2\alpha_1 + 3\alpha_2, \alpha_2)$ ; г)  $y(\alpha_1^3; \alpha_2^2)$ .

**205.** Является ли линейным оператор  $f: E_3 \rightarrow E_3$ , если для  $\forall \bar{x} \in E_3$ :

а)  $f(\bar{x}) = |\bar{x}| \bar{i}$ ; б)  $f(\bar{x}) = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$ ; в)  $f(\bar{x}) = (\bar{i}, \bar{x}) \cdot \bar{x}$ ;

г)  $f(\bar{x}) = (\bar{i}, \bar{x}) \cdot \bar{j}$ ; д)  $f(x) = [a, x]$ , где  $a$  – фиксированный вектор этого пространства.

**206.** Является ли линейным оператор  $f: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$ , если для  $\forall A \in M_{n \times n}$ :

а)  $f(A) = E + A$ , где  $E$  – единичная матрица;

б)  $f(A) = \alpha \cdot A$  ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ); в)  $f(A) = A^2$ ; г)  $f(A) = A^T$ .

**207.** Дан оператор  $f$ , переводящий каждый вектор  $X$  в вектор  $Y = f(x) = (\text{пр}_{ox} X) \cdot a$ , где  $a$  – фиксированный вектор пространства  $E_3$ . Доказать, что оператор  $f$  является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе  $i, j, k$ , если:

а)  $a = 3i + 2j + k$ ; б)  $a = i - 3j - 2k$ .

**208.** Даны координаты вектора  $X$  и матрица  $A$  линейного оператора  $f$ . Найти координаты вектора  $y = f(x)$ , если:

а)  $X = (2; -1; 3)$ ;  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ ; б)  $X = i$ ;  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

**209.** Пользуясь определением, установить, какие из данных векторов являются собственными векторами оператора  $f$ , и найти их собственные значения, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**210.** Найти характеристическое уравнение и спектр линейного оператора, заданного матрицей  $A$  в некотором базисе, если:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

**211.** Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей  $A$ :

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{г) } A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{д) } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

## Лекция 15

### ГЛАВА 6. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Структура линейного пространства, которой наделяют его операции сложения элементов и умножения их на число, является слишком общей. Безусловно, отношение линейной независимости позволяет ввести важнейшие понятия базиса и размерности. Однако, во-первых, при этом с неизбежностью возникает проблема выбора базиса, так как в линейном пространстве все базисы равноправны (за исключением тех случаев, когда выбор базиса диктуется содержанием задачи, как, например, в задаче о параллельном проецировании). Во-вторых, стандартная процедура разложения элементов по базису производится путем решения соответствующей линейной системы относительно коэффициентов разложения, называемых **координатами элементов в заданном базисе**. Но с увеличением размерности пространства резко возрастает число необходимых арифметических вычислений, что в случае бесконечномерных пространств делает задачу разложения по базису неразрешимой.

Тем не менее на примере геометрических векторов мы видели, что наиболее удобным для решения большинства геометрических задач является декартов базис. Введение декартового базиса основано на использовании дополнительного отношения между векторами, а именно, отношения перпендикулярности. В свою очередь, критерий перпендикулярности связан с вычислением специального действительного числа – их скалярного произведения.

Таким образом, мы приходим к идее о введении в линейных пространствах новой бинарной операции с числовыми значениями, которая позволила бы ввести между элементами пространства отношение, аналогичное отношению перпендикулярности, и сопоставить каждому элементу однозначно определенную числовую характеристику типа модуля вектора.

#### 6.1. Евклидовы пространства

В параграфе 5 главы 3 операция скалярного произведения для геометрических векторов была определена с помощью указания конкретной расчетной формулы (3.5.1), в которую входили модули векторов и угол между ними. Но в линейных пространствах такие понятия как «модуль элемента», «угол между элементами» отсутствуют, а ука-

знание конкретной расчетной формулы, например, с использованием координат бессмысленно, так как результат не будет однозначно определен, а будет зависеть от выбора базиса. При этом, как отмечалось выше, в линейных пространствах нет критериев, позволяющих выделить какой-то универсальный базис. По этой причине введение скалярного произведения для элементов линейного пространства основывается не на указании конкретной расчетной формулы, а на идее задания системы общих свойств операции.

### Определение 6.1.1

Скалярным произведением элементов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  из действительного линейного пространства  $\mathcal{L}$  называется бинарная операция с действительными числовыми значениями, обозначаемая как  $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ , удовлетворяющая следующим условиям (аксиомам скалярного произведения):

$$S_1: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \quad (\text{коммутативность})$$

$$S_2: (\mathbf{u} + \mathbf{w}, \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad (\text{дистрибутивность})$$

$$S_3: (\lambda \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \lambda (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (\text{однородность})$$

$$S_4: \mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geq 0, \text{ причем } (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0$$

### Определение 6.1.2

Евклидовым линейным пространством (в дальнейшем обозначаемое как  $E^n$ ) называется действительное линейное пространство со скалярным произведением размерности  $n$ .

Следует отметить, в определении 6.1.1 отсутствует конкретная расчетная формула. Это означает, что в одном и том же линейном пространстве можно в принципе ввести скалярное произведение различными способами. При этом, конечно, мы можем в принципе получать и различные евклидовы линейные пространства. Данный факт подчеркивает отличие математики от других наук. Математика изучает модели с определенными отношениями между объектами, а не сами объекты. Для приложений выбирается та математическая модель, которая наиболее адекватно описывает изучаемое явление. Понятно, что математики разрабатывают модели как бы с запасом, а на передовом фронте науки адекватные модели могут и отсутствовать (типичная ситуация в современной теоретической физике).

Наличие в линейном пространстве новой операции позволяет ввести и новые отношения между его элементами.

### Определение 6.1.3

Элементы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  евклидова пространства  $E$  называются *ортogonalными*, если их скалярное произведение равно нулю:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}.$$

### Определение 6.1.4

*Ортogonalной системой* называется всякое множество, состоящее из взаимно ортogonalных элементов.

### Общие свойства ортogonalных систем

Укажем основные свойства ортogonalных систем:

I. Для ортogonalной системы  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$  справедливо равенство Пифагора:

$$(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \dots + \mathbf{u}_m)^2 = \mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2 + \dots + \mathbf{u}_m^2. \quad (6.1.1)$$

II. Ортogonalная система линейно независима.

III. Любая ортogonalная система, число элементов которой равно размерности пространства  $n = \dim E$ , образует базис этого пространства.

Введенное отношение ортogonalности является непосредственным обобщением отношения перпендикулярности в пространстве геометрических векторов.

Следуя далее этой стратегии, сопоставим каждому элементу числовую характеристику, аналогичную модулю геометрического вектора.

### Определение 6.1.5

*Нормой* элемента  $\mathbf{u}$  евклидова пространства  $E$  называется действительное число  $\|\mathbf{u}\|$ , вычисляемое по формуле

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{(\mathbf{u}, \mathbf{u})}. \quad (6.1.2)$$

### Общие свойства норм

Представим общие свойства норм:

I. Норма любого элемента  $\mathbf{u} \in E$  есть число неотрицательное, причем норма равна нулю только для нулевого элемента:

$$\|\mathbf{u}\| \geq 0, \quad \|\mathbf{u}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} = 0.$$

II. Для любых элементов  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in E$  и действительного числа  $\lambda$  справедливы соотношения:

$$\|\lambda \mathbf{u}\| = |\lambda| \|\mathbf{u}\|; \quad (6.1.3)$$

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\|. \quad (6.1.4)$$

III. Для любых двух элементов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  евклидова пространства  $E$  справедливо неравенство Бесселя:

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|. \quad (6.1.5)$$

*Замечание.* Норму можно ввести и независимо от скалярного произведения с помощью задания характерной системы аксиом I–II, что приводит к общему понятию *нормированных пространств*. Однако, к сожалению, не в любом нормированном пространстве можно ввести операцию скалярного произведения, а значит, и отношение ортогональности. Для введения скалярного произведения в нормированном пространстве дополнительно должно выполняться так называемое **тождество параллелограмма (теорема фон Неймана–Йордана)**:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2(\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2). \quad (6.1.6)$$

#### Определение 6.1.6

*Ортонормированной* называется ортогональная система, состоящая из элементов с единичной нормой.

Аналогично вводится понятие *ортонормированного базиса*  $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ :

- 1)  $n = \dim E$ ;
- 2)  $\mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_j$  для  $\forall i, j = \overline{1, n}$ ;
- 3)  $\|\mathbf{e}_k\| = 1$  для  $\forall k = \overline{1, n}$ .

Именно использование ортонормированных базисов позволяет значительно упростить процедуру разложения элементов по базису. В этом случае коэффициенты разложения равны скалярным произведениям раскладываемого элемента с базисными элементами:

$$\mathbf{u} = c_1 \mathbf{e}_1 + c_2 \mathbf{e}_2 + \dots + c_n \mathbf{e}_n \quad \Rightarrow \quad c_k = (\mathbf{u}, \mathbf{e}_k), \quad k = \overline{1, n}.$$

Примером ортонормированного базиса в пространстве геометрических векторов является декартов базис.

Пусть в евклидовом пространстве  $E$  элементы заданы наборами координат в некотором базисе  $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ . Тогда записывая разложения элементов по базису, с учетом аксиом  $S_1 - S_4$  для скалярного произведения находим:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left( \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{b}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{b}_j \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i y_j (\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_j).$$

### Определение 6.1.7

*Матрицей Грама*  $\Gamma_{\mathcal{U}} = \|\gamma_{ij}\|$  упорядоченной системы элементов  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$  евклидова пространства  $E$  называется квадратная матрица, элементы которой  $\gamma_{ij}$  равны скалярным произведениям соответствующих элементов системы:

$$\gamma_{ij} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j). \quad (6.1.7)$$

Таким образом, скалярное произведение элементов евклидова пространства, заданных наборами координат в некотором базисе  $\mathcal{B}$  можно записать в следующей матричной форме:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T \Gamma Y, \quad (6.1.8)$$

где  $\Gamma \equiv \Gamma_{\mathcal{B}}$  – матрица Грама базиса  $\mathcal{B}$ .

### Общие свойства матрицы Грама

Отметим следующие общие свойства матрицы Грама:

I. Матрица Грама  $\Gamma$  симметрична:

$$\Gamma^T = \Gamma. \quad (6.1.9)$$

II. Все главные миноры матрицы Грама  $\Gamma$  любой системы, состоящей из  $m$  элементов евклидова пространства, положительны:

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_m > 0. \quad (6.1.10)$$

III. Определитель матрицы Грама системы элементов  $\mathcal{U} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_m\}$  равен квадрату меры (*гиперобъема*)  $m$ -мерного параллелепипеда, «построенного» на элементах системы:

$$\det \Gamma \equiv V^2. \quad (6.1.11)$$

Пусть  $\mathcal{B}$  – базис евклидова пространства  $E$ , а  $\Gamma$  – его матрица Грама. Тогда из соотношения (6.1.8) с учетом правила изменения координат при переходе к другому базису  $\mathcal{B}'$  (5.3.9) находим:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = X^T \Gamma Y = X'^T \Gamma' Y' \Rightarrow X'^T (T^T \Gamma T) Y' = X'^T \Gamma' Y',$$

где  $T \equiv T_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  – матрица перехода от исходного базиса к штрихованному. Отсюда в силу произвольности выбора элементов  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  следует, что при смене базиса матрица Грама преобразуется как

$$\Gamma' = T^T \Gamma T. \quad (6.1.12)$$

### Определение 6.1.8

Квадратные матрицы  $A$  и  $B$  порядка  $n$  называются *конгруэнтными*, если найдется невырожденная матрица  $C$  того же порядка такая, что

$$B = C^T A C. \quad (6.1.13)$$

Отношение конгруэнтности принято обозначать как  $A \simeq B$ .

### Основные свойства конгруэнтных матриц

Укажем основные свойства конгруэнтных матриц:

I. Отношение конгруэнтности матриц есть отношение эквивалентности:

1.  $A \simeq A$  (рефлексивность)
2.  $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$ , (симметричность)
3.  $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$  (транзитивность)

II. Если  $A \simeq B$ , то

$$\text{sign}(\det A) = \text{sign}(\det B);$$

$$\text{rg} A = \text{rg} B.$$

Таким образом, в евклидовом пространстве  $E^n$  все матрицы Грама одного порядка конгруэнтны.

**Пример 6.1.1.** Установить, задает ли приведенная расчетная формула скалярное произведение в указанных пространствах:

- 1) в пространстве  $\mathbb{R}^3$ :  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ ;
- 2) в пространстве матриц  $M_{n \times n}$  порядка  $n > 1$ :  $(A, B) = \det(AB)$ .

### Решение

1. Проверим выполнение аксиом скалярного произведения:

$$S_1: (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}) \text{ (коммутативность) – верно;}$$

$$S_4: \mathbf{u} = (1, -1, 0) \Rightarrow (\mathbf{u}, \mathbf{u}) = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -2 < 0.$$

Так как для выбранного с целью проверки элемента  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}) < 0$ , то четвертая аксиома не выполняется. Следовательно, скалярное произведение в пространстве  $\mathbb{R}^3$  не может быть задано по указанной формуле.

2. Проверяем аксиомы скалярного произведения:

$$S_1: (A, B) = \det(AB) = \det(BA) = (B, A) \text{ – верно;}$$

$$S_3: (\lambda A, B) = \det(\lambda AB) = \det(\lambda A) \det B = \lambda^n \det A \det B = \lambda^n \det(AB),$$

⇓

$$(\lambda A, B) = \lambda^n (A, B) \neq \lambda (A, B) \text{ при } n > 1.$$

Таким образом, аксиома однородности нарушается, а поэтому в пространстве квадратных матриц  $M_{n \times n}$  порядка  $n > 1$  скалярное произведение по указанной формуле задать нельзя. ■

*Замечание.* В пространстве квадратных матриц  $M_{n \times n}$  скалярное произведение чаще всего задают как

$$(A, B) = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \equiv \text{Tr}(A^T B). \quad (6.1.14)$$

При этом норма матрицы будет вычисляться по формуле

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}^2}. \quad (6.1.15)$$

**Пример 6.1.2.** Для векторов  $\mathbf{u} = (1, 1)$  и  $\mathbf{v} = (1, -1)$ , заданных своими координатами в некотором базисе, найти скалярные произведения, определенные формулами

1)  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = x_1 x_2 + y_1 y_2$ ;

2)  $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2x_1 x_2 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ .

### Решение

Подставляя в формулы для скалярных произведений координаты векторов, находим

$$1) (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 = 0;$$

$$2) (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -1.$$

Таким образом, в первом случае вектора  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  ортогональны (так как скалярное произведение равно нулю), а во втором – нет (скалярное произведение отлично от нуля). Отношение ортогональности зависит от выбора скалярного произведения.

Выпишем матрицы Грама для заданных типов скалярных произведений:

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Они связаны друг с другом соотношением конгруэнтности:

$$\Gamma_2 = C^T \Gamma_1 C = C^T C.$$

Далее запишем матрицу  $C$  в общем виде:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}.$$

После подстановки ее в предыдущее соотношение с учетом явного вида матрицы  $\Gamma_2$  последовательно получаем:

$$C^T C = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \gamma^2 & \alpha\beta + \gamma\delta \\ \alpha\beta + \gamma\delta & \beta^2 + \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \alpha^2 + \gamma^2 = 2, \\ \alpha\beta + \gamma\delta = 1, \\ \beta^2 + \delta^2 = 3. \end{cases}$$

Полученная система содержит всего 3 уравнения с 4 неизвестными. Так как мы ищем любое частное решение, то положим  $\delta = 0$ . Тогда из последнего уравнения находим  $\beta = \sqrt{3}$  (выбираем одно из возможных решений, в данном случае со знаком «+»). Затем из второго уравнения определяем  $\alpha = 1/\sqrt{3}$ , и, наконец, из первого уравнения –  $\gamma = \sqrt{5}/\sqrt{3}$ . Таким образом, матрицу  $C$ , связывающую матрицы Грама  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  преобразованием конгруэнтности, можно записать как

$$C = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix}.$$

Действительно, имеем:

$$C^T C = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5} \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ \sqrt{5} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \Gamma_2. \quad \blacksquare$$

## Лекция 16

### 6.2. Сопряженные линейные операторы

В евклидовых пространствах в силу бинарности операции скалярного произведения каждому линейному оператору, действующему в пространстве, можно поставить в соответствие оператор-партнер.

#### Определение 6.2.1

Оператор  $\hat{A}^*$  называется *сопряженным* к линейному оператору  $\hat{A}$ , действующему в евклидовом пространстве  $E$ , если для любых двух элементов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  из  $E$  справедливо равенство

$$(\hat{A}[\mathbf{u}], \mathbf{v}) = (\mathbf{u}, \hat{A}^*[\mathbf{v}]). \quad (6.2.1)$$

#### Свойства сопряженных операторов

Отметим некоторые свойства сопряженных операторов:

I. Сопряженный оператор является линейным оператором:

$$1. \hat{A}^*[\mathbf{x} + \mathbf{y}] = \hat{A}^*[\mathbf{x}] + \hat{A}^*[\mathbf{y}] \quad (\text{аддитивность}) \quad (6.2.2)$$

$$2. \hat{A}^*[\lambda \mathbf{x}] = \lambda \hat{A}^*[\mathbf{x}] \quad (\text{однородность}) \quad (6.2.3)$$

II. Для каждого линейного оператора  $\hat{A}$  существует только один сопряженный ему оператор  $\hat{A}^*$

III. Справедливы следующие операторные равенства:

$$(\hat{A}^*)^* = \hat{A}; \quad (6.2.4)$$

$$(\hat{A}\hat{B})^* = \hat{B}^*\hat{A}^*. \quad (6.2.5)$$

Пусть  $A$  и  $A^*$  – матрицы линейных операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^*$  соответственно в некотором базисе  $\mathcal{B}$  пространства  $E$ , а  $\Gamma$  – матрица Грама

в этом же базисе. Тогда, записывая соотношение (6.2.1) в матричной форме, в силу произвольности элементов  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$  находим:

$$A^* = \Gamma^{-1} A^T \Gamma. \quad (6.2.6)$$

Данное соотношение, по существу, означает, что матрица сопряженного оператора подобна транспонированной матрице исходного оператора.

В случае ортонормированного базиса  $\mathcal{B} \equiv \mathcal{E}$  матрица Грама совпадает с единичной матрицей  $\Gamma = E$ . Поэтому в ортонормированном базисе матрица сопряженного оператора  $\hat{A}^*$  равна транспонированной матрице оператора  $\hat{A}$ :

$$A^* = A^T. \quad (6.2.7)$$

Простота соотношения (6.2.7) подчеркивает исключительный характер использования именно ортонормированных базисов. При этом сама операция транспонирования матриц наделяется более глубоким смыслом, чем просто перестановка строк и столбцов местами, а именно: *транспонированные матрицы соответствуют матрицам сопряженных операторов.*

### 6.3. Самосопряженные линейные операторы

Пусть  $\hat{A}$  – некоторый линейный оператор, действующий в евклидовом пространстве  $E$ .

#### Определение 6.3.1

Линейный оператор  $\hat{A}$  называется *самосопряженным*, если выполняется операторное равенство

$$\hat{A}^* = \hat{A}. \quad (6.3.1)$$

#### Свойства самосопряженных операторов

Укажем следующие свойства самосопряженных операторов:

I. Матрица  $A$  самосопряженного оператора  $\hat{A}$  в базисе  $\mathcal{B}$  с матрицей Грама  $\Gamma$  подобна своей транспонированной матрице  $A^T$ , причем

$$A = \Gamma^{-1} A^T \Gamma. \quad (6.3.2)$$

II. Матрица  $A$  самосопряженного оператора в ортонормированном базисе  $\mathcal{E}$  симметрична:

$$A^T = A. \quad (6.3.3)$$

III. Самосопряженный оператор  $\hat{A}$  действующий в  $n$ -мерном евклидовом пространстве  $E^n$ , имеет ровно  $n$  (необязательно различных) действительных собственных значений  $\lambda_k$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

IV. Собственные векторы  $\mathbf{u}_k$  и  $\mathbf{v}_m$  самосопряженного оператора  $\hat{A}$  соответствующие различным собственным значениям  $\lambda_k \neq \lambda_m$ , ортогональны, т. е.

$$(\mathbf{u}_k, \mathbf{v}_m) = 0.$$

V. В евклидовом пространстве  $E^n$  всегда существует ортонормированный базис, составленный из собственных векторов некоторого самосопряженного оператора  $\hat{A}$ .

Все свойства являются непосредственным следствием определений (6.2.1) и (6.3.1). В качестве примера приведем цепочку преобразований для доказательства свойства IV:

$$\begin{aligned} \lambda_k (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) &= (\lambda_k \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) = (\hat{A}[\mathbf{u}_k], \mathbf{u}_m) = (\mathbf{u}_k, \hat{A}[\mathbf{u}_m]) = \\ &= (\mathbf{u}_k, \lambda_m \mathbf{u}_m) = \lambda_m (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) \Rightarrow (\lambda_k - \lambda_m)(\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m) = 0. \end{aligned}$$

### Теорема 6.3.1

Всякая симметричная матрица диагонализуется в базисе ее собственных векторов.

В формулировке теоремы под собственными векторами матрицы подразумеваются собственные векторы соответствующего ей линейного оператора.

Конкретная процедура диагонализации симметричной матрицы, основанная на переходе к базису, составленному из собственных векторов матрицы, достаточно подробно рассмотрена в примере 5.6.2.

## Лекция 17

### 6.4. Квадратичные формы

#### Определение 6.4.1

Квадратичной формой действительных аргументов  $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  называется однородный многочлен второй степени:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j. \quad (6.4.1)$$

Заметим, что здесь термин «однородный» указывает на специальный тип многочленов как сумму одночленов одной степени (в нашем случае – второй).

Квадратичные формы представляют собой чрезвычайно важный класс многочленов, которые встречаются во многих разделах математики и ее приложений. В первую очередь, здесь следует отметить аналитическую геометрию (*кривые и поверхности второго порядка*), математический анализ (*экстремумы функций нескольких переменных*), математическую статистику (*метод наименьших квадратов*).

Основная задача при анализе квадратичных форм связана с установлением области их значений.

#### Определение 6.4.2

Квадратичная форма  $f$  называется *положительно определенной*, если для любого ненулевого набора аргументов она принимает только положительные значения ( $f > 0$ ), и *отрицательно определенной* – если только отрицательные ( $f < 0$ ).

Квадратичная форма называется *знаконеопределенной*, если найдутся два набора аргументов, на которых форма  $f$  принимает значения разных знаков.

На нулевом наборе аргументов любая квадратичная форма обращается в ноль:

$$f(0, 0, \dots, 0) = 0.$$

При этом ненулевые наборы аргументов, на которых квадратичная форма обращается в ноль, называются *изотропными*.

Заметим, что в определении 6.4.2 все знаки неравенств строгие, поэтому можно сказать, что такие формы обладают *свойством знако-*

*определенности.* В случае, когда формы принимают просто неотрицательные ( $f \geq 0$ ) или неположительные ( $f \leq 0$ ) значения, т. е. допускается наличие изотропных наборов аргументов, формы называют *знакополуопределенными*.

Понятно, что вся информация о квадратичной форме может быть получена из анализа ее коэффициентов  $a_{ij}$ . Тип квадратичной формы легко установить в случае, если форма представлена как сумма квадратов.

### Определение 6.4.3

Квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \quad (6.4.2)$$

называется *квадратичной формой канонического вида*.

Для форм канонического вида (6.4.2) введем *индексы*  $n_+(f)$  и  $n_-(f)$ , равные числу положительных и отрицательных коэффициентов  $a_{ii}$  соответственно. Тогда, если  $n_+(f) = n$  (т. е. все коэффициенты  $a_{ii} > 0$ ), форма будет *знакоположительной*, а если  $n_-(f) = n$  — *знакоотрицательной*.

### Теорема 6.4.1

Всякая квадратичная форма может быть записана в каноническом виде.

Для доказательства теоремы достаточно указать какой-нибудь алгоритм, позволяющий преобразовать квадратичную форму в форму канонического вида (6.4.2). Наиболее простым алгоритмом является алгоритм, предложенный Лагранжем (*метод Лагранжа*). Этот алгоритм, по-существу, аналогичен алгоритму Гаусса для решения линейных систем. В его основе лежит идея последовательного исключения из анализа тех аргументов, которые уже входят в слагаемые, представляющие собой полные квадраты.

Рассмотрим последовательность преобразований по методу Лагранжа на конкретном примере.

**Пример 6.4.1.** Привести заданную квадратичную форму к каноническому виду:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

### Решение

Заметим, что в заданной форме коэффициент  $a_{11} = 2 \neq 0$ . Поэтому на первом шаге сгруппируем все слагаемые, содержащие переменную  $x_1$ . Далее из анализа перекрестных членов определим комбинацию, квадрат которой обеспечит выделение полного квадрата, содержащего  $x_1$ . После добавления (и вычитания) квадрата этой комбинации получим:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left( x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_1 x_3 \right) + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2 x_3 = \\ &= 2 \left( x_1^2 - 2x_1 \left( \frac{1}{2} x_2 - \frac{3}{4} x_3 \right) + \left( \frac{1}{2} x_2 - \frac{3}{4} x_3 \right)^2 - \left( \frac{1}{2} x_2 - \frac{3}{4} x_3 \right)^2 \right) + \\ &\quad + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2 x_3 = \\ &= 2 \left( \left( x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_3 \right)^2 - \left( \frac{1}{2} x_2 - \frac{3}{4} x_3 \right)^2 \right) + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_2 x_3 = \\ &= 2 \left( x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{23}{8} x_3^2 - \frac{5}{2} x_2 x_3. \end{aligned}$$

Выполняя далее аналогичные преобразования для слагаемых с переменной  $x_2$ , окончательно находим:

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) &= 2 \left( x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \left( x_2 - \frac{5}{2} x_3 \right)^2 - \frac{25}{4} x_3^2 \right) + \frac{23}{8} x_3^2 = \\ &= 2 \left( x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{3}{4} x_3 \right)^2 + \frac{1}{2} \left( x_2 - \frac{5}{2} x_3 \right)^2 - \frac{1}{4} x_3^2. \end{aligned}$$

Важно отметить, что полученный канонический вид не является единственным. Действительно, в качестве начальной переменной алгоритма Лагранжа, можно взять любую переменную  $x_i$  отличным от нуля коэффициентом  $a_{ii} \neq 0$ . В нашем примере вместо  $x_1$  в качестве такой переменной можно выбрать как  $x_2$  ( $a_{22} = 1 \neq 0$ ), так и  $x_3$  ( $a_{33} = 4 \neq 0$ ). В частности, для  $x_2$  имеем:

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2, x_3) &= \\
&= (x_2^2 - 2x_2(x_1 + 2x_3) + (x_1 + 2x_3)^2 - (x_1 + 2x_3)^2) + 2x_1^2 + 4x_3^2 + 3x_1x_3 = \\
&= (x_2 - x_1 - 2x_3)^2 + x_1^2 - x_1x_3 = (x_2 - x_1 - 2x_3)^2 + \left(x_1 - \frac{1}{2}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_3^2.
\end{aligned}$$

*Замечание.* Если в исходной квадратичной форме присутствуют только перекрестные члены (т. е. все коэффициенты  $a_{ii} = 0$ ), то после введения фиктивной переменной  $X = x_i - x_j$  с последующей заменой  $x_i = X + x_j$  в квадратичной форме появится слагаемое  $a_{ij}x_j^2$ , что уже позволяет применить стандартный алгоритм Лагранжа. ■

Канонические формы, полученные в разобранным примере, несмотря на их различие, тем не менее обладают одной общей особенностью, а именно: индексы форм равны:

$$n_+(f) = 2, \quad n_-(f) = 1.$$

Это совпадение не является случайным, а имеет общий характер.

#### **Теорема 6.4.2 (закон инерции)**

Значения индексов  $n_+(f)$  и  $n_-(f)$  квадратичной формы  $f$  не зависят от способа приведения ее к каноническому виду.

Из теоремы моментально следует, что индексы имеют статус характеристических чисел, и по их значениям можно провести классификацию квадратичных форм. В принципе для классификации квадратичных форм можно взять любой набор линейно независимых комбинаций индексов. Наиболее важным по своему смыслу и содержанию является набор, состоящий из суммы и разности индексов, которые называются **рангом**  $r$  и **сигнатурой**  $\sigma$  квадратичной формы соответственно:

$$r = n_+ + n_-; \tag{6.4.3}$$

$$\sigma = n_+ - n_-. \tag{6.4.4}$$

Как следствие закона инерции они также не зависят от способа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

Квадратичные формы допускают матричную форму записи. Для этого предварительно введем матрицы:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ – матрица-столбец переменных;}$$

$$A = \parallel a_{ij} \parallel \text{ – матрица коэффициентов.}$$

Тогда, используя операции умножения матриц и их транспонирование, квадратичную форму (6.4.1) можно записать как

$$f = X^T A X. \quad (6.4.5)$$

Матричная форма записи позволяет привлечь к изучению квадратичных форм хорошо разработанный математический аппарат линейной алгебры. В частности, теперь ранг квадратичной формы  $r$  будет просто совпадать с рангом матрицы  $A$ :

$$r(f) = \text{rg}A,$$

а задача преобразования квадратичной формы к каноническому виду, по существу, есть задача диагонализации ее матрицы.

Правда, здесь необходимо сделать одно очень важное замечание. К сожалению, матрица квадратичной формы определена неоднозначно. Действительно, предположим, что матрица  $A$  антисимметрична и  $A^T = -A$ . В матричном равенстве (6.4.4) обе его части есть матрицы первого порядка (при этом  $f^T = f$ ), поэтому справедлива следующая цепочка преобразований:

$$X^T A X = (X^T A X)^T = X^T A^T X = -X^T A X \Rightarrow X^T A X = 0.$$

Таким образом, *квадратичная форма не изменится, если к ее матрице добавит любую (!) антисимметричную матрицу*. Данный результат, по существу, является следствием коммутативности операции умножения действительных чисел (значений аргументов  $x_k$  и коэффициентов квадратичной формы  $a_{ij}$ ). Отметим, что в случае отсутствия коммутативности операции умножения (а такие математические объекты вводятся, например, для описания явлений микромира в квантовой физике) этот результат неверен.

**Пример 6.4.2.** Получить явный вид квадратичных форм  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданных матрицами:

$$1. A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad 2. A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

*Решение*

1. Запишем квадратичную форму  $f_1$  в матричном виде (6.4.5):

$$f = X^T A_1 X = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Далее, выполняя операцию умножения матриц, после упрощения находим:

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_1 + 3x_3)x_1 + (-2x_1 + 3x_2 - x_3)x_2 + (3x_1 + x_2 + 2x_3)x_3 = \\ &= x_1^2 + 3x_3x_1 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 - x_3x_2 + 3x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3. \end{aligned}$$

2. Выполняя аналогичные действия с матрицей  $A_2$ , последовательно получаем:

$$\begin{aligned} f_2 &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \\ &= (x_1 - 3x_2 + 7x_3)x_1 + (x_1 + 3x_2 - 2x_3)x_2 + (-x_1 + 2x_2 + 2x_3)x_3 = \\ &= x_1^2 - 3x_2x_1 + 7x_3x_1 + x_1x_2 + 3x_2^2 - 2x_3x_2 - x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_3^2 = \\ &= x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3. \end{aligned}$$

Таким образом, формы совпадают:  $f_1 = f_2$ . Чтобы понять этот результат, найдем разность заданных матриц:

$$\tilde{A} = A_1 - A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 7 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $\tilde{A}$  антисимметрична, что и является причиной совпадения квадратичных форм (так как  $A_1 = A_2 + \tilde{A}$ ).

Неоднозначность определения матриц квадратичных форм весьма неудобна при работе с ними, так как совпадение квадратичных форм проявляется неявно (не является очевидным) и требует дополнительного анализа. С другой стороны, любая квадратная матрица однозначно (!) может быть представлена в виде суммы симметричной и антисимметричной матриц:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) \equiv A^s + A^a. \quad (6.4.6)$$

Отсюда следует, что

$$X^T A X = X^T (A^s + A^a) X = X^T A^s X,$$

причем такое представление квадратичной формы *единственно*.

Запись квадратичной формы в матричном виде с использованием симметричной матрицы  $A^s$  называется **правильной записью**. Правильную запись матричного вида квадратичной формы можно получить из любой матричной записи с помощью замены

$$A \rightarrow \frac{A + A^T}{2}.$$

**Пример 6.4.3.** Записать квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 3x_1x_2 - 4x_1x_3 - 11x_2x_3$$

в матричном виде.

*Решение*

Выбор элементов матрицы квадратичной формы согласуем просто с порядком произведения аргументов:  $a_{ij} \leftrightarrow x_i x_j$ .

Тогда по виду заданной квадратичной формы получаем:

$$f = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Полученный матричный вид не является правильной его записью, так как матрица квадратичной формы  $A$  верхнетреугольная и не является симметричной. Для правильной записи предварительно вычислим матрицу:

$$A^s = \frac{1}{2}(A + A^T) =$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ -4 & -11 & 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & 5 & -11/2 \\ -2 & -11/2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда правильная запись имеет вид:

$$f = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} -2 & 3/2 & -2 \\ 3/2 & 5 & -11/2 \\ -2 & -11/2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

■

В дальнейшем под матричным видом квадратичной формы будем понимать только ее правильную запись.

## ЗАДАНИЯ К ГЛАВЕ 6

**212.** Установить, является ли функция  $F(x, y)$  скалярным произведением в двумерном вещественном линейном пространстве для пары векторов  $x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ :

а)  $F(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ ;

б)  $F(x, y) = x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ ;

в)  $F(x, y) = 2x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2$ .

**213.** Проверить, что стандартное скалярное произведение в  $n$ -мерном вещественном арифметическом пространстве действительно обладает всеми свойствами евклидова скалярного произведения.

**214.** Проверить, что в линейном пространстве непрерывных на отрезке  $[a, b]$  функций с обычными операциями сложения и умножения на число скалярное произведение может быть задано формулой

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt.$$

**215.** В  $n$ -мерном вещественном арифметическом пространстве скалярное умножение задано как функция координат векторов  $x = (x_1, x_2)$  и  $y = (y_1, y_2)$ . Вычислить матрицы Грама стандартного базиса и базиса, составленного из векторов  $f_1, f_2$ . Найти выражение скалярного произведения векторов  $x$  и  $y$  через их координаты в базисе  $f_1, f_2$ :

а)  $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2$ ,  $f_1 = (1, 2)^T$ ,  $f_2 = (2, 1)^T$ ;

б)  $(x, y) = 4x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$ ,  $f_1 = (1, 0)^T$ ,  $f_2 = (1, -1)^T$ .

**216.** Найти ранг квадратичных форм:

а)  $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ ;

б)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ .

**217.** Получить явный вид квадратичных форм  $f(x_1, x_2, x_3)$ , заданных матрицами:

а)  $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ; б)  $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 1 \end{pmatrix}$ .

**218.** Привести квадратичную форму  $f(x_1, x_2, x_3)$  к каноническому виду:

а)  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_2x_3;$

б)  $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2;$

в)  $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 2x_2x_3.$

## ОТВЕТЫ К ЗАДАНИЯМ

1.  $a_{23} = 1$ ,  $a_{41} = 4$ . 2.  $a_{12} = 0$ ,  $a_{24} = 1$ . 3.  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ .

4.  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -2 \\ -1 & 2 & 7 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ . 5.  $\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 4 & 4 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}$ . 6.  $\begin{pmatrix} -19 & 0 \\ 3 & -4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ . 7.  $\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & 14 \\ -9 & 15 \end{pmatrix}$ .

8.  $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ . 9.  $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 6 & 6 & 1 \\ -1 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ . 10.  $\begin{pmatrix} 12 & 3 & 16 \\ 4 & 12 & 6 \\ 19 & 8 & 19 \end{pmatrix}$ . 11.  $\begin{pmatrix} 1 & 11 & 6 \\ 2 & -13 & 5 \end{pmatrix}$ .

12. Не определено. 13.  $\begin{pmatrix} -6 & -18 & 21 \\ -4 & 6 & -7 \\ 2 & -12 & -14 \end{pmatrix}$ .

14.  $AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $BA = [9]$ .

15.  $AB = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ;  $BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

16.  $AB = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ ;  $BA = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ . 17.  $\begin{pmatrix} 22 \\ 63 \end{pmatrix}$ . 18.  $\begin{pmatrix} 16 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

19.  $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . 20.  $\begin{pmatrix} -13 & -10 \\ 20 & -3 \end{pmatrix}$ . 22. Выполняется.

$$23. \begin{pmatrix} -\sin 3\alpha & \cos 3\alpha \\ -\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha \end{pmatrix}. \quad 24. \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}. \quad 25. \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 5 & 3 & -2 \\ -5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$26. 9. \quad 27. 2. \quad 28. \frac{n(n-1)}{2}. \quad 29. \frac{n(n+1)}{2}. \quad 32. 5; -2; -2. \quad 33. 6; 8; 1.$$

$$34. -15. \quad 35. 46. \quad 36. -6. \quad 40. -664. \quad 41. -3600. \quad 42. M = 4; A = -10.$$

$$43. A_{23} = 6, A_{41} = 1. \quad 44. 11. \quad 45. 3. \quad 46. 0. \quad 47. 10. \quad 48. 80.$$

$$50. 75. \quad 52. 320. \quad 53. 0. \quad 54. r = 2. \quad 55. r = 1. \quad 56. r = 2. \quad 57. r = 2.$$

$$58. 3. \quad 59. 2. \quad 60. 2. \quad 61. 3. \quad 62. \alpha = 2. \quad 63. \alpha \neq 1/4. \quad 64. \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$65. \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}. \quad 66. -\frac{1}{14} \begin{bmatrix} -2 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \\ -8 & -12 & 6 \end{bmatrix}. \quad 67. \frac{1}{48} \begin{bmatrix} -10 & 12 & -10 \\ -17 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$68. \frac{1}{7} \begin{bmatrix} -3 & 1 & 9 \\ -5 & -3 & 8 \\ -4 & -1 & 5 \end{bmatrix}. \quad 69. \frac{1}{67} \begin{bmatrix} 13 & -3 & -7 \\ 12 & 23 & 9 \\ -5 & -4 & 13 \end{bmatrix}. \quad 70. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$71. \text{ Не существует. } \quad 72. \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}. \quad 73. \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

$$74. \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 10 & 26 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}. \quad 75. \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 76. \frac{1}{50} \begin{bmatrix} 15 & -13 \\ 45 & 11 \end{bmatrix}.$$

$$77. \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 10 & 57 \\ 12 & -14 \\ -8 & -40 \end{bmatrix}. \quad 78. \begin{bmatrix} 0 & -1 & 12 \\ -5 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad 83. (-1, 1). \quad 84. (1, 1).$$

$$85. (2, 1, -1). \quad 86. (0, 3, -1). \quad 87. (1, -1, 0). \quad 88. (1, 0, -1). \quad 89. (1, 1).$$

$$90. (1, 1). \quad 91. (2, -1, 1). \quad 92. (-1, 2, 3). \quad 93. (1, -2, 0). \quad 94. (3, 0, -2).$$

$$95. x_1 = \frac{18}{15} - \frac{1}{3}C, x_2 = -\frac{7}{5}, x_3 = C, C \in R.$$

$$96. x_1 = \frac{4+2C}{3}, x_2 = \frac{7-C}{3}, x_3 = C, C \in R.$$

97.  $x_1 = \frac{5-7C}{5}, x_2 = \frac{8C}{5}, x_3 = C, C \in R.$

98.  $x_1 = 11C - 4, x_2 = 3 - 7C, x_3 = C.$

99.  $x_1 = 4, x_2 = 1.$  100. Несовместна. 101.  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = 2.$

102.  $x_1 = C - 1, x_2 = 2 - C, x_3 = C, C \in R.$

103.  $x_1 = \frac{3}{10} - \frac{2}{10}C_2 - C_1, x_2 = C_1, x_3 = -\frac{1}{2} - 4C_2, x_4 = \frac{1}{4} - \frac{14}{10}C_2,$

$x_5 = C_2, \{C_1, C_2\} \subset R.$

104.  $x_1 = -10C + 10, x_2 = C, x_3 = -16C + 15, x_4 = 4 - 5C, C \in R.$

121.  $\vec{d}\left(\frac{5}{6}, -\frac{13}{6}\right).$  122.  $\vec{d}(9, -3).$  123.  $\vec{d}\left(-2, \frac{3}{2}, \frac{17}{2}\right).$  124.  $\vec{d} = \left(\frac{7}{4}, \frac{6}{4}, \frac{7}{4}\right).$

125.  $\arccos\left(-\frac{6}{\sqrt{238}}\right).$  126.  $\arccos\left(\sqrt{\frac{5}{42}}\right).$  127.  $\frac{7\sqrt{2}}{2}.$  128. 30.

129.  $\sqrt{129}.$  130.  $\sqrt{26}.$  131.  $2\sqrt{10}.$  132.  $\frac{5\sqrt{2}}{2}.$  134. -1. 135. 6. 136. 42.

137. 24. 138. Да. 139. Нет. 140.  $\frac{43}{3}.$  141. 14,  $\gamma < 15.$

142. а)  $x - 4y + 9 = 0;$  б)  $x + 8y - 15 = 0.$  143. а)  $x = 2;$  б)  $y = 1.$

144. а)  $y = x - 4;$  б)  $y = 3x - 10.$  145. а) проходит через начало координат; б) параллельна оси  $Oy;$  в) параллельна оси  $Ox;$  г) совпадает с осью  $Oy.$  146. а)  $y = 5x - 7;$  б)  $x + 5y + 15 = 0;$  в)  $y = x - 3;$  г)  $y = x + 1.$

147. а)  $\left. \begin{aligned} \frac{x-3}{1} = \frac{y+2}{5}, & \quad x = t+3, \\ & \quad y = 5t-2. \end{aligned} \right\};$  б)  $\left. \begin{aligned} \frac{x-3}{4} = \frac{y+2}{-1}, & \quad x = 4t+3, \\ & \quad y = -t-2. \end{aligned} \right\}.$

148.  $t = -1/2.$  149.  $\left. \begin{aligned} x &= t+56, \\ y &= -2+4t. \end{aligned} \right\}.$  150.  $M(6, 0), y = -3x/2 + 4.$

151.  $3x + y = 0.$  152. а)  $\vec{n} = (2, -1), \vec{s} = (1, 2), k = 2, a = -3/2, b = 3;$   
б)  $\vec{n} = (3, -1), \vec{s} = (1, 3), k = 3, a = 0, b = 0.$

153. а)  $(CD): \frac{x-6}{-4} = \frac{y-1}{-1}, h = \frac{19}{\sqrt{17}}, \cos \varphi = \frac{19}{\sqrt{17 \cdot 58}},$

$L: \frac{x-1}{\sqrt{26+5\sqrt{17}}} = \frac{y-2}{-4\sqrt{26}-\sqrt{17}};$  б)  $(CD): \frac{x+2}{3} = \frac{y}{-4}, h = 4,$

$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}, L: \frac{x-2}{4-2\sqrt{5}} = \frac{y+2}{3+\sqrt{5}}.$

154. а)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ; б)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; в) прямые параллельны; г)  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ .

155. а) пересекаются в точке  $M_0(1, 0)$ ; б) перпендикулярны; в) параллельны; г) совпадают. 156.  $3x - 2y - 12 = 0$ ,  $3x - 8y + 24 = 0$ .

157. а)  $x + y - 1 = 0$ ,  $\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$ ,  $p = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ; б)  $2x - y - 1 = 0$ ,  
 $p = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ,  $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{1}{\sqrt{5}}y - \frac{1}{\sqrt{5}} = 0$ . 158.  $x - 3y - 23 = 0$ ,  $7x + 9y + 19 = 0$ ,

$4x + 3y + 13 = 0$ . 159. а)  $13x + 2y + z - 48 = 0$ ; б)  $3x - 2y + 4z - 28 = 0$ .

160. а) плоскость проходит через начало координат; б) плоскость параллельна оси  $Oz$ ; в) плоскость проходит через ось  $Ox$ ; г) плоскость параллельна координатной плоскости  $yOz$ ; д) плоскость параллельна оси  $Ox$ ; е) координатная плоскость  $xOz$ . 161. а)  $2x - y + z - 2 = 0$ .

162. а)  $x - 2y - z = 0$ . 163. а)  $x + y - 3 = 0$ ; б)  $x + 2y - 2 = 0$ .

164. а) 2, 3, 6; б) 6, 4, 3. 165. а)  $5x + 8y - 7z - 1 = 0$ ;

б)  $3x + 10y + 2z - 27 = 0$ . 166.  $d = 3$ . 167. 8. 168.  $6x - y - 9z + 32 = 0$ .

169.  $2x - 6y + 3z - 28 = 0$ ,  $2x - 6y + 3z - 84 = 0$ .

170. а)  $\cos \varphi = 1/6$ ; б)  $\pi/4$ . 171. (1, 2, 3). 172. а) 5, 5; б)  $1/(2\sqrt{6})$ .

173. а) пересекаются,  $\cos(p_1, p_2) = \frac{1}{2\sqrt{15}}$ ; б) пересекаются,

$\cos(p_1, p_2) = \frac{1}{2}$ ; в) параллельны; г) совпадают.

174. а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z+5}{3}$ ; б)  $\frac{x+5}{7} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{1}$ .

175. а)  $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$ ; б)  $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{0}$ ; в)  $\frac{x-2}{5} = \frac{y}{2} = \frac{z+3}{-1}$ ;

г)  $\frac{x-2}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z+3}{1}$ . 176. а)  $\left. \begin{array}{l} x=0, \\ y=t, \\ t=0. \end{array} \right\}$ ; б)  $\left. \begin{array}{l} x = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}; \\ x=0, \\ z=0. \end{array} \right\}$ .

177. а)  $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$ ; б)  $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-3}$ .

178. а)  $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{1}$ ; б)  $\frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-13} = \frac{z-1}{-7}$ .

179. а)  $\frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ ; б)  $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{0}$ .

180. а)  $\left(\frac{17}{7}, -\frac{15}{7}, \frac{37}{7}\right)$ ; б) не пересекаются. 181. а)  $\pi/6$ ; б)  $\pi/2$ .

182. а)  $\alpha = -7$ ; б)  $\alpha = -4$ . 183. а)  $(-7, -5, -11)$ ; б)  $(1, 1, 1)$ .

184.  $11x - 17y - 19z + 10 = 0$ . 185.  $d = 3$ . 186. а)  $a = 5, b = 3$ ;

б)  $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ ; в)  $e = \frac{4}{5}$ ; г)  $D_1: x = -\frac{25}{4}, D_2: x = \frac{25}{4}$ .

187. а)  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ , б)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ ; в)  $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$ ; г)  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1$ .

188. а)  $O(3, -1), a = 3, b = \sqrt{5}, e = \frac{2}{3}, D_1: 2x + 3 = 0, D_2: 2x - 15 = 0$ ;

б)  $O(-1, 2), a = 5, b = 4, e = \frac{3}{5}, D_1: 3x + 28 = 0, D_2: 3x - 22 = 0$ .

189. а)  $a = 3, b = 4$ ; б)  $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$ ; в)  $e = \frac{3}{5}$ ; г)  $y = \pm \frac{4}{3}x$ .

190. а)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ; б)  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ ; в)  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$ ; г)  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ;

д)  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ . 191. а)  $C(2, -3), a = 3, b = 4, e = \frac{5}{3}$ ,

асимптоты  $4x - 3y - 17 = 0$  и  $4x + 3y + 1 = 0$ , директрисы  $5x - 1 = 0$

и  $5x - 19 = 0$ ; б)  $C(-5, 1), a = 8, b = 6, e = \frac{5}{4}$ , асимптоты  $3x + 4y + 11 = 0$

и  $3x - 4y + 19 = 0$ , директрисы  $x = -11,4$  и  $x = 1,4$ .

192. а)  $p = 3$ ; б)  $p = 5/2$ ; в)  $p = 2$ ; г)  $p = 1/2$ . 193. а)  $y = \frac{1}{8}x^2 - x + 3$ .

199. а)  $T = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ; б)  $T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ .

200.  $T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & -8 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \\ 6 & 0 & 1 & -72 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ . 201. а)  $\bar{x}\left(\frac{5}{2}, -\frac{19}{2}\right)$ ; б)  $\bar{x}(1, 1)$ .

202. а)  $\bar{x}\left(\frac{17}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{16}{3}\right)$ ; б)  $\bar{x}\left(-\frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2}\right)$ .

212. а) нет; б) да; в) нет. 215. а)  $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ ; б)  $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix}$ . 216. а) 4; б) 2.

217. а)  $x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_3 + 6x_2x_3$ ;

б)  $-2x_1^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 14x_2x_3$ .

218. а)  $f(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 - 5y_2^2 + 3,2y_3^2$ ,  $x_1 = y_1 - 2y_2 - 0,4y_3$ ,

$x_2 = y_2 + 0,2y_3$ ,  $x_3 = y_3$ ; б)  $f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 0,5y_2^2 + 5y_3^2$ ,

$x_1 = y_1 + 0,5y_2$ ,  $x_2 = y_2$ ,  $x_3 = y_3$ ; в)  $f(y_1, y_2, y_3) = -y_1^2 + 11y_2^2 + \frac{10}{11}y_3^2$ ,

$x_1 = y_1 + 3y_2 + \frac{3}{11}y_3$ ,  $x_2 = y_2 + \frac{1}{11}y_3$ ,  $x_3 = y_3$ .

## Литература

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. – 21-е изд. – СПб. : Лань, 2005. – 448 с.
2. Элементы линейной алгебры / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, Н. В. Попова [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1986. – 271 с.
3. Бугров, Я. С. Высшая математика / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Дрофа, 2004. – Т. 1. – 288 с.
4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-Пресс. 2024. – Ч. 1. – 288 с.
5. Головина, Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – М. : Ленанд, 2024. – 400 с.
6. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для вузов : в 4 ч. / под общ. ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. – М. : Изд-во физ.-мат. наук. 2001. – Ч. 1. – 288 с.
7. Гельфанд, И. М. Лекции по линейной алгебре / И. М. Гельфанд. – 8-е изд. – М. : КДУ, 2009. – 320 с.
8. Кострикин, А. И. Введение в алгебру : в 3 ч. / А. И. Кострикин. – М. : МЦИМО, 2025. – Ч. 1: Основы алгебры. – 272 с.
9. Ильин, В. А. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Г. Д. Ким. – М. : Проспект, 2007. – 400 с.
10. Бабич, А. А. Аналитическая геометрия и алгебра : пособие по курсу «Математика. Геометрия и алгебра» для студентов специальности 1-40 04 01 «Информатика и технологии программирования» днев. формы обучения / А. А. Бабич. – Гомель : ГГТУ им. П. О. Сухого, 2019. – 125 с.

Учебное издание

**Бабич Александр Антонович  
Корсун Лидия Дмитриевна**

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ  
И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА**

**Учебное пособие**

Редактор *Т. Н. Мисюрова*  
Компьютерная верстка *Н. Б. Козловская*

Подписано в печать 24.12.25.

Формат 60x84/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».

Ризография. Усл. печ. л. 11,86. Уч.-изд. л. 13,15.

Тираж 99 экз. Заказ № 716/36.

Издатель и полиграфическое исполнение  
Гомельский государственный  
технический университет имени П. О. Сухого.  
Свидетельство о гос. регистрации в качестве издателя  
печатных изданий за № 1/273 от 04.04.2014 г.  
пр. Октября, 48, 246746, г. Гомель